Spécialité de Terminale : correction du devoir sur feuille n° 2

I

1. (a) En juin 2017, on peut estimer qu'il y aura $27\,500 - 150 = \boxed{27\,350}$ étudiants dans cette université.

   (b) À la rentrée de septembre 2017, il y aura à la suite de l'augmentation de 4 % :
   $1,04 \times 27\,350 = \boxed{28\,444}$ étudiants.

2. Soit u_n le nombre d'étudiants en septembre de l'année 2016+n.
   En juin de l'année suivante (année $(n+1)$), 150 étudiants auront démissionné, pour un reste de $u_n - 150$.
   Puis à la rentrée de septembre de l'année $(n+1)$, le nombre d'étudiants aura subi une augmentation de 4 %, soit
   $1,04 \times (u_n - 150) = 1,04 \times u_n - 156$.
   Donc en septembre de l'année $(n+1)$ il y aura $1,04u_n - 156$ étudiants, soit pour tout entier naturel n,

   $$\boxed{u_{n+1} = 1,04u_n - 156}.$$

3. On complète les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3	Traitement :	n prend la valeur 0
L4		U prend la valeur 27 500
L5		Tant que $U \leqslant 33\,000$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		U prend la valeur $1,04 \times U - 156$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher $2016 + n$

4. (a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas :

	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de U	27 500	28 444	29 426	30 447	31 509	32 613	33 762

   (b) La valeur affichée en sortie de cet algorithme est : $\boxed{2016+6}$, donc 2022.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
   Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\,900$.

   (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 3\,900 = 1,04 \times u_n - 156 - 3\,900 = 1,04 \times u_n - 4\,056 = 1,04(u_n - 3\,900)$
   $= \boxed{1,04v_n}$.
   La suite (v_n) est donc **géométrique** de raison 1,04 et de premier terme
   $v_0 = 27\,500 - 3\,900 = 23\,600$.

   (b) Donc pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 23\,600 \times 1,04^n$.
   De plus, On a $u_n = v_n + 3900$ donc $\boxed{u_n = 3\,900 + 23\,600 \times 1,04^n}$

   (c) La suite (v_n) est une suite géométrique de $q = 1,04$. $q = 1,04 > 1$ donc la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$. Donc la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est aussi égale à $+\infty$.
   Le nombre d'étudiants de cette université ne se stabilisera jamais, et continuera à augmenter à l'infini dépassant toute limite de capacité que l'on souhaiterait imposer.

II

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}.$$

1. $u_1 = \dfrac{3 \times 1 + 2 \times 2}{5} = \boxed{\dfrac{7}{5}}$; $v_1 = \dfrac{2 \times 1 + 3 \times 2}{5} = \boxed{\dfrac{8}{5}}$.
   $u_2 = \dfrac{3 \times \frac{7}{5} + 2 \times \frac{8}{5}}{5} = \dfrac{\frac{37}{5}}{5} = \boxed{\dfrac{37}{25}}$; $v_2 = \dfrac{2 \times \frac{7}{5} + 3 \times \frac{8}{5}}{5} = \dfrac{\frac{38}{5}}{5} = \boxed{\dfrac{38}{25}}$

2. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} - \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} = \dfrac{2u_n + 3v_n - 3u_n - 2v_n}{5} = \dfrac{-u_n + v_n}{5} = \dfrac{v_n - u_n}{5} = \dfrac{1}{5}(v_n - u_n) = \dfrac{1}{5} d_n$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = \dfrac{1}{5} d_n$ donc la suite (d_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$ et de premier terme $d_0 = v_0 - u - 0 = 2 - 1 = 1$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = d_0 q^n = \boxed{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$ (puisque c'est une suite géométrique)

3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par $s_n = u_n + v_n$.
   (a) $s_0 = \boxed{3}$: $s_1 = \dfrac{7}{5} + \dfrac{8}{5} = \dfrac{15}{5} = \boxed{3}$; $s_2 = \dfrac{37}{25} + \dfrac{38}{25} = \dfrac{75}{25} = \boxed{3}$.
   On peut conjecturer que la suite (s_n) est constante.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} + \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} = \dfrac{5u_n + 5v_n}{5} = \dfrac{5(u_n + v_n)}{5}$
   $= u_n + v_n = \boxed{s_n}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$ donc la suite (s_n) est constante.
   $s_0 = 3$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{s_n = 3}$.

4. $\begin{cases} d_n = v_n - u_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n \\ s_n = v_n + u_n = 3 \end{cases}.$

   Par somme des deux lignes, on trouve $2v_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 3$ donc $\boxed{v_n = \dfrac{1}{2}\left(3 + \left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right)}$.

   Par différence des deux lignes, on trouve : $2u_n = 3 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ donc $\boxed{u_n = \dfrac{1}{2}\left(3 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right)}$.

5. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:
   (a) $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   On a $u_n = \dfrac{1}{2}(3 - q^n)$ avec $q = \dfrac{1}{5}$
   On a alors : $T_n = \dfrac{1}{2}\left[(3 - q^0) + (3 - q^1) + (3 - q^2) + \cdots + (3 - q^n)\right] = \dfrac{1}{2}\left[3(n+1) - (1 + q + q^2 + \cdots + q^n)\right)$.
   Or $1 + q + q^2 - \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \dfrac{5}{4}\left(1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$ D'où :

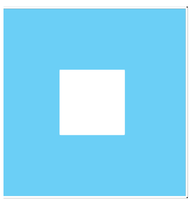
$$\boxed{T_n = \frac{1}{2}\left[3(n+1) - \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)\right]}$$

(b) De même $W_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ donne :

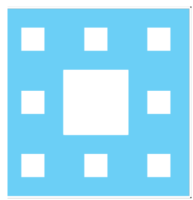
$$\boxed{W_n = \frac{1}{2}\left[3(n+1) + \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)\right]}$$

III D'après le livre CQFD 1re

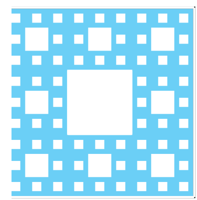
Dans un lointain futur, sur la planète Thêta, vivent Horion et Apolline au sein d'une colonie d'humains, gouvernée avec bienveillance par une I.A. Mais tout n'est pas si paisible sur la planète Thêta…« Le tapis est mité » constate Horion.« Tu pourrais au moins cacher ta joie » s'emporte Apolline qui adorait son tapis laineux. Le tapis carré de 1 m de côté, ravissant, selon les goûts d'Apolline, hideux selon les critères d'Horion, est effectivement attaqué par des mites. « Il s'agit de mites de l'espèce Waclaw », croit bon de préciser l'I.A. à qui personne n'avait rien demandé, exaspérant davantage Apolline.
Les mites ont leur stratégie ; le premier jour, elles s'attaquent à la partie centrale du tapis : si on partage le tapis carré en 9 carrés de même aire, les mites mangent le carré central. Le second jour, elles s'attaquent de la même manière aux 8 carrés autour du carré manquant, et ainsi de suite pour les autres jours.
(Remarque : la figure « limite » qu'on obtient ainsi d'appelle le « tapis de Sierpinski », du nom du mathématicien polonais Waclaw Franciszek Sierpinski 1882-1961)



$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

1. Il est clair que, par construction, on a $c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   La suite (c_n) est donc géométrique, de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $c_0 = 1$.

   On en déduit $\boxed{c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $A_1 = c_1^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

   À l'étape suivante, les mites mangent $\frac{1}{9}$ de ce qui reste, donc $\frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{8}{81}$. La surface totale mangée est alors $A_2 = \frac{8}{81} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{17}{81}}$.

3. Chaque jour, les mites mangent $\frac{1}{9}$ de la partie du tapis restante.

   À l'étape $n+1$, les mites mangent $\frac{1}{9}$ de la partie non encore mangée, donc $\frac{1}{9}(1 - A_n)$.

   La partie mangée est donc $\frac{1}{9}(1 - A_n) + A_n = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$.

   On en déduit que, pour tout n, $\boxed{A_{n+1} = \frac{8}{9}A - n + \frac{1}{9}}$

4. (a) Pour tout entier $n > 1$, on pose $B_n = A_n - 1$. Pour tout $n > 1$, $B_{n+1} = A_{n+1} - 1 = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9} - 1 = \frac{8}{9}A_n - \frac{8}{9} = \frac{8}{9}(A_n - 1) = \frac{8}{9}B_n$ donc $\boxed{B_{n+1} = \frac{8}{9}B_n}$.

   La suite (B_n) est donc géométrique, de raison $q = \frac{8}{9}$ et de premier terme $B_1 = A_1 - 1 = -\frac{8}{9}$.

(b) On en déduit que, pour tout $n > 1$, $B_n = B_1 \times q^{n-1} = -\dfrac{8}{9} \times \left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1} = -\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.

Alors : $\boxed{A_n = 1 + B_n = 1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^n}$

5. (a) $-1 < \dfrac{8}{9} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = 1$, donc A_n va finir par dépasser 99 %.

$A_n \geqslant 99\,\% = 0,99 \Leftrightarrow \left(\dfrac{8}{9}\right)^n \leqslant 0,01$.

En cherchant un tableau de valeurs de la suite (A_n), on trouve que n doit être supérieur à 40.

Au bout de 40 jours, les mites auront mangé au moins 99 % du tapis.

(b) On cherche pour quelles valeurs de n la longueur c_n est inférieure ou égale à 0,5 mm = 0,0005 m.

$-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$ puisque $c_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

On trouve à la calculatrice qu'il faut avoir $n \geqslant 7$.

6. Les trous vont effectivement devenir tellement petits qu'on ne les verra plus mais le tapis va finir par disparaître puisque la limite de (A_n) est 1.

Horion et Apolline ont tous les deux raison.

IV

a) $e^{x^2+6x+5} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{x^2+6x+5} \geqslant e^0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 \geqslant 0$.

-1 est une racine évidente donc $x^2 + 6x + 5 = (x+1)(x+5)$, qui a pour racines -1 et -5.

Ce trinôme est positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-5] \cup [-1\,;\,+\infty[}$

b) $e^{-x^2-3x+5} \geqslant e \Leftrightarrow e^{-x^2-3x+5} \geqslant\geqslant e^1 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 5 \geqslant 1 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 \geqslant 0$.

1 est une racine évidente donc $-x^2 - 3x + 4 = -(x-1)(x+4)$, qui est positif (du signe contraire à celui du coefficient de x^2) entre les racines.

L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{\mathcal{S} = [-4\,;\,1]}$

V

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto x^2 e^x - 1$.

(a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2xe^x + x^2e^x + 0 = \left(x^2 + 2x\right)e^x = x(x+2)e^x$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x(x+2)$ qui s'annule en -2 et 0 et qui est positif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et négatif entre les racines.

Tableau de signes donné ci-dessous avec le tableau de variation ?

(c) **Tableau de variation** :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$4e^{-2} - 1 \approx -0,46$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

(d) D'après le tableau de variation, $g(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,0[$.

Sur $[0\,;\,+\infty[$, $g(x)$ passe de valeurs négatives à des valeurs positives et g est croissante, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ (théorème des valeurs intermédiaires).

À la calculatrice, on obtient $\boxed{\alpha \approx 0,7}$.

(e) **Tableau de signes de g(x)** :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

(a) La fonction f n'est pas définie en 0 car on ne peut pas diviser par 0.

(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \boxed{\dfrac{g(x)}{x^2}}$

(c) $x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, donc strictement négatif sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,\alpha[$, nul en α et strictement positif sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

(d)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty}$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty}$.

Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

Courbe (non demandée) (en n'oubliant pas la tangente horizontale en α) :