Spécialité de Terminale : correction du devoir sur feuille n° 1

I

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \leqslant 1$, $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $(n \geqslant 1)$

- **Initialisation** : pour $n = 1$:
  $S_1 = 1^2 = 1$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{2} = \dfrac{6}{6} = 1$.
  On a bien égalité : $\mathscr{P}_1$ est vraie.
- **Hérédité** :
  On suppose la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier n quelconque, donc

  $$S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (\textbf{hypothèse de récurrence})}$$

  Au rang $n+1$:
  $S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = S_n + (n+1)^2$
  $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$ (d'après l'hypothèse de récurrence)
  $= \dfrac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \dfrac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right)}{6} = \dfrac{(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right)}{6}$.
  Factorisons $2n^2 + 7n + 6$; $\Delta = 1 > 0$; il y a deux racines : $n_1 = -2$ et $n_2 = -\dfrac{3}{2}$.
  On en déduit que : $2n^2 + 7n + 6 = 2(n+2)\left(n + \dfrac{3}{2}\right) = (n+2)(2n+3)$.
  Alors : $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \boxed{\dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}}$ c.q.f.d.

La propriété est **héréditaire**.
D'après l'**axiome de récurrence**, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

II

On considère la fonction f définie sur $[-5\,;\,-1[\cup]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,4]$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

PARTIE A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur [-5; 4] par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x+1)(x-1)$.
   $g'(x)$ s'annule et change de signe en -1 et 1.
   C'est un trinôme du second degré : il est positif (du signe de 3) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines (et, par conséquent, négatif entre les racines).
   $\boxed{g(-5) = -114}$; $\boxed{g(4) = 38}$; $\boxed{g(-1) = -2}$ et $\boxed{g(1) = -6}$.

   On en déduit le tableau de variation de g :

x	-5		-1		1		4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-114	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	48

2. Il est clair que $g(x) < 0$ sur $[-5\,;\,1]$ et que $g(x)$ s'annule une seule fois sur $[1\,;\,4]$.
   L'équation $g(x) = 0$ admet donc une solution unique α sur l'intervalle $[-5\,;\,4]$ et $\alpha > 1$.
   À la calculatrice, on trouve : $\boxed{\alpha \approx 2,20}$

3. Tableau de signes de g :

x	-5		α		4
$g(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B

1. f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur son ensemble de définition.
$\forall x \in \mathscr{D},\ f'(x) = \dfrac{\left(3x^2+4x\right)\left(x^2-1\right)-2x\left(x^3+2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = \dfrac{3x^4-3x^2+4x^3-4x-2x^4-4x^3}{\left(x^2-1\right)^2} = \dfrac{x^4-3x^2-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$
$= \dfrac{x\left(x^3-3x-4\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = \boxed{\dfrac{xg(x)}{\left(x^2-1\right)2}}$.

2. Le dénominateur est positif (carré d'un réel), donc $f'(x)$ est du signe du numérateur.
x s'annule et change de signe en 0 : le signe de $g(x)$ a été étudié dans la première partie.
Les limites n'étaient pas demandées, mais en voici le calcul :
   - En $-\infty$: $f(x) = \dfrac{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = x \times \dfrac{1+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$.
   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ par produit et quotient.
   - En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = x \times \dfrac{1+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$.
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ par produit et quotient.
   - En -1 : $\displaystyle\lim_{x\to-1}\left(x^3-2x^2\right)=1>0$; $\displaystyle\lim_{x\to-1}\left(x^2-1\right)=0$.
   Pour connaître le signe de x^2-1, il faut savoir si x tend vers -1 par la gauche ou par la droite.
   Si $x<-1$, $x^2-1>0$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x^2-1=0$ avec $x^2-1>0$.
   Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty}$ (quotient de deux nombres positifs).
   Si $-1<x<1$, $x^2-1<0$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x^2-1=0$ avec $x^2-1<0$.
   Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty}$ (quotient de deux nombres de signes contraires).
   - En 1 : $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(x^3-2x^2\right)=3>0$; $\displaystyle\lim_{x\to-1}\left(x^2-1\right)=0$.
   Pour connaître le signe de x^2-1, il faut savoir si x tend vers 1 par la gauche ou par la droite.
   Si $-1x<1$, $x^2-1<0$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} x^2-1=0$ avec $x^2-1<0$.
   Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty}$ (quotient de deux nombres de signes contraires).
   Si $x>1$, $x^2-1>0$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} x^2-1=0$ avec $x^2-1>0$.
   Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty}$ (quotient de deux nombres positifs).

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$g(x)$		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow +\infty$	$\|$	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$	

3. Pour tout $x \in \mathscr{D}$, $x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{(x+2)(x^2-1)+x+2}{x^2-1} = \dfrac{x^3-x+2x^2-2+x+2}{x^2-1} = f(x)$ donc

$$\boxed{f(x) = x+2+\frac{x+2}{x^2-1}}$$

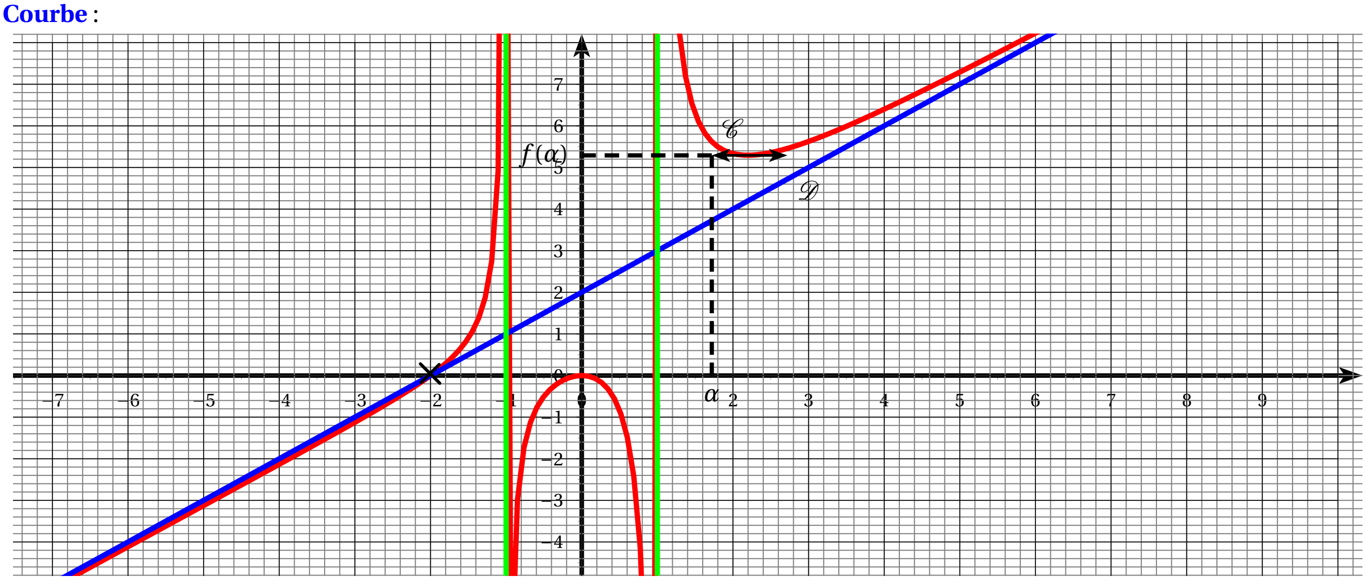
4. Pour connaitre a position de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d"équation $y = x+2$, on étudie le signe de la différence $f(x)-(x+2)$.
   $\forall x \in \mathscr{D}$, $f(x)-(x+2) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$ qui s'annule en -2.
   On renseigne un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2		-1		1		$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
x^2-1	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	
$\dfrac{x+2}{x^2-1}$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

   On en déduit que $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\mathscr{D}$ sur $]-\infty\,;\,2] \cup --1\,;\,1[$ et en dessous sur $[2\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[$.

5. $\forall x \in \mathscr{D}$, $f(x)-(x+2) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$.
   Pour $x \neq 0$, $\dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x2}}$.
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 1$.
   $\lim\limits_{x\to śpm\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc, par produit :
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)] = 0$.
   La droite d'équation $y = x+2$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.

6. **Courbe** :



La courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes verticales d'équations $x = -1$ et $x = 1$ et une oblique, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 2$.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ se coupant au point de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$.
$\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse α.

III

Parmi tous les rectangles de périmètre égal à 40, le but est de trouver ceux dont l'aire est maximale.

1. Le demi-périmètre est 20 donc l'autre dimension est $20 - x$.
2. On en déduit : $\mathscr{A}() = (-) = -x^2 + 20x$.
3. $\mathscr{A}'(x) = -2x + 20$ qui s'annule en 10.
   Tableau de variation :

x	0		10		20
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$	0	$\nearrow$	100	$\searrow$	0

On pouvait aussi trouver les coordonnées du sommet directement, puisque $\mathscr{A}(x)$ est un polynôme du second degré. Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, l'abscisse du sommet est $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et l'ordonnée $\beta = f(\alpha)$.
En effet, on a vu en seconde que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
L'aire du rectangle est maximale pour $x = 10$; le rectangle est alors un **carré** car ses quatre dimensions sont égales.

IV

Cet exercice propose de comprendre sur un exemple, pourquoi certains objets usuels ont tous la même forme.

Pour réduire les coûts de fabrication, une entreprise doit fabriquer des casseroles cylindriques de volume v donné en utilisant le moins de métal possible. (on ne tient pas compte du manche)

On. note h la hauteur d'une casserole, x le rayon du disque du fond et S l'aire totale (aire latérale + aire du fond).

1. Le volume du cylindre est $v = \pi x^2 h$ donc $\boxed{h = \dfrac{v}{\pi x^2}}$.

   L'aire latérale du cylindre est celle d'un rectangle, de longueur le périmètre de la base du cylindre et de hauteur celle du cylindre, donc vaut $2\pi x h = \dfrac{2\pi x v}{\pi x^2} = \boxed{\dfrac{2v}{x}}$.

   On en déduit que $\boxed{S = \pi x^2 + \dfrac{2v}{x}}$.

2. Soit $f : x \mapsto \pi x^2 + \dfrac{2v}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   $f'(x) = 2\pi x + 2v \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2\pi x - \dfrac{2v}{x^2} = \dfrac{2\left(\pi x^3 - v\right)}{x^2}$.
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{v}{\pi}$ donc $x = \sqrt[3]{\dfrac{v}{\pi}}$ et, comme la fonction cube est croissante, $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \leqslant \sqrt[3]{\dfrac{v}{\pi}}$.
   Tableau de variation :

x	0		$\sqrt[3]{\dfrac{v}{\pi}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\sqrt[3]{\dfrac{v}{\pi}}\right)$	$\nearrow$	

3. Pour v fixé, la valeur de x pour laquelle le coût de fabrication d' une casserole est le plus bas est $\boxed{\sqrt[3]{\dfrac{v}{\pi}}}$.

   Remarque : posons $\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{v}{\pi}}$.
   La hauteur de la casserole est alors $h = \dfrac{v}{\pi\alpha^2} = \dfrac{v\alpha}{\pi\alpha^3} = \dfrac{v\alpha}{\pi \times \dfrac{v}{\pi}} = \alpha$.
   La casserole a alors une hauteur égale au rayon de la base. Ainsi les casseroles ont-elles toutes la même forme (hauteur égale au rayon de base) car ainsi la quantité de métal utilisé pour la fabrication est minimum.