Spécialité de Terminale : contrôle sur les limites

I (Question de cours : 2 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Rappeler ce que veut dire : « $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ».

II (4,5 points)

Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto x^2 - 5x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$

b) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x + 9}{x}$ (définie sur $\mathbb{R}^*$)

c) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 5}{3x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$

III (3 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-3x+1}{x-2}$.
On se propose d'étudier la limite de $f(x)$ en 2.

1. (a) Que vaut $\lim\limits_{x \to 2} (-3x+1)$?
   (b) Que vaut $\lim\limits_{x \to 2} (x-2)$?
2. (a) Dresser le tableau de signes de $x-2$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x)$

IV (3,5 points)

1. Trouver l'expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 5 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 5.$$

2. (a) Trouver l'expression d'une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous par :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

   (b) Le courbe représentative de cette fonction admet-elle des asymptotes ?
   Si oui, lesquelles ?

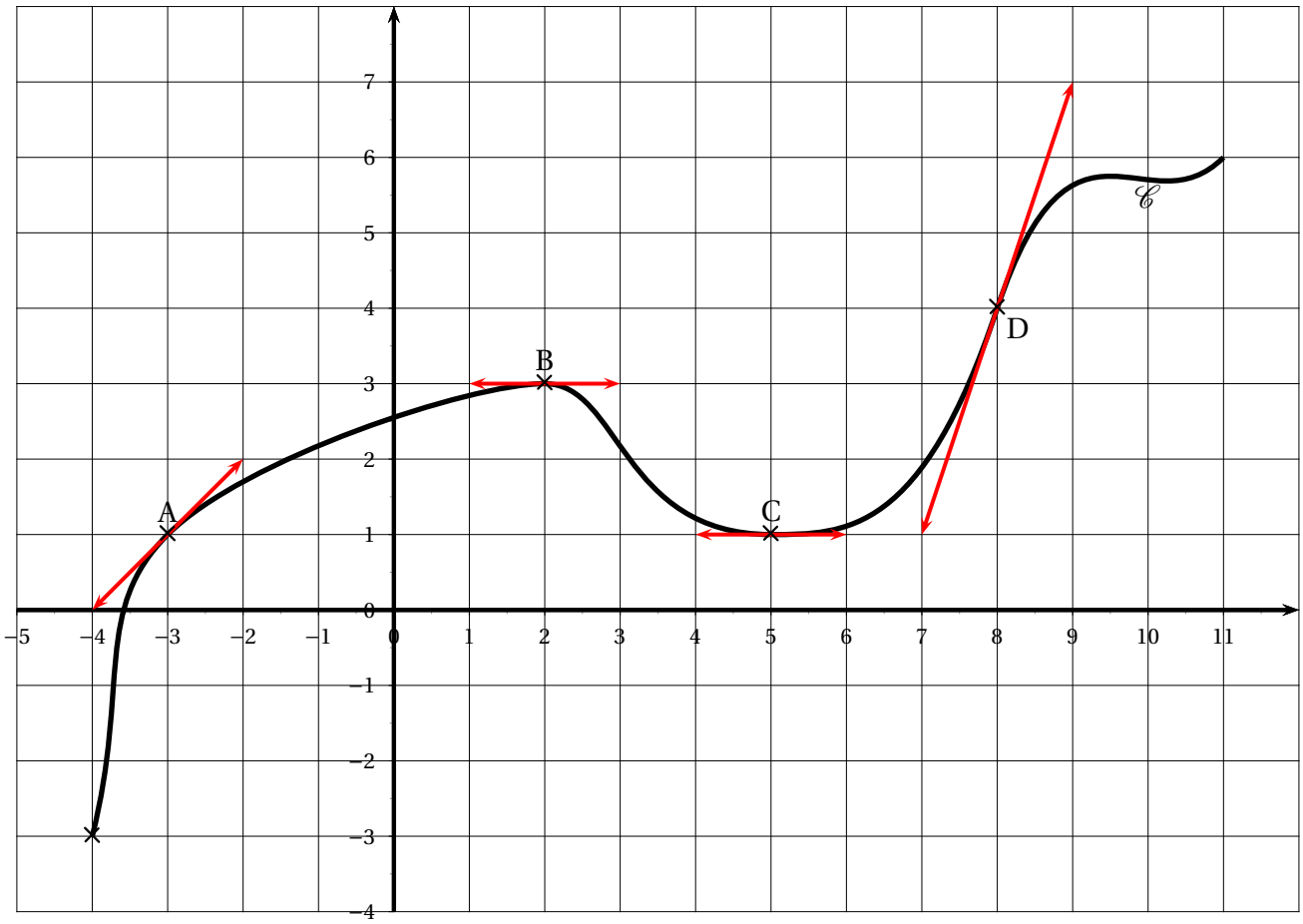
V (3 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$$

1. Juliette affirme que, puisque 2 est une valeur interdite, la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   A-t-elle raison ?
2. Montrer que $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$.
3. En déduire $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ et commenter alors la réponse de Juliette.

VI (2,5 points)



Lire et justifier les valeurs de $f'(-3)$, $f'(2)$, $f'(5)$ et $f'(8)$.

VII (1,5 points)

Pour les fonctions suivantes, donner l'expression de leur dérivée.

1. $f(x) = x^7$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \sqrt{x}$ pour $x > 0$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ sur $\mathbb{R}^*$