

# Démonstration par récurrence

## Table des matières

I	Description de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ . . . . .	1
II	Axiome de récurrence . . . . .	1
III	Exemples de rédaction . . . . .	2
IV	Utilité des deux étapes . . . . .	3

### Exemples introductif :

- Imaginons que des ouvriers construisant un immeuble aient toutes les instructions nécessaires pour construire un étage d'immeuble sur le même modèle que l'étage qui est au-dessous.

Ainsi peuvent-ils construire le deuxième (identique au premier), le troisième (identique au deuxième), le quatrième (identique au troisième) et ainsi de suite; on peut imaginer qu'ils peuvent alors construire un immeuble aussi haut que l'on veut (en négligeant les contraintes de résistance des matériaux qui limitent les hauteurs d'immeubles).

Le seul problème est qu'il faut **d'abord avoir construit indépendamment** le premier étage, car on ne peut pas prendre pour modèle un étage précédent, puisqu'il n'y en a pas!

- Faire tomber des dominos en cascade. Il faut d'abord faire tomber le premier domino et ensuite, la chute d'un domino entraîne la chute du suivant.

### Principe d'une démonstration par récurrence :

#### I Description de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Ce principe est basé sur la description de l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels :

- Il existe un plus petit entier, 0.
- Chaque entier autre que 0 s'obtient en ajoutant 1 à son prédécesseur.

#### II Axiome de récurrence

**Remarque** : Un axiome (du grec ancien *axioma*, « considéré comme digne, convenable, évident en soi » désigne une proposition indémontrable utilisée comme fondement d'un raisonnement.

On peut en savoir davantage [ici](#).



#### Axiome de récurrence :

Si une propriété est vraie pour l'entier naturel  $n_0$  et s'il est prouvé que, lorsqu'elle est vraie pour un entier  $p$  quelconque supérieur ou égal à  $n_0$ , alors elle est vraie pour  $p + 1$ , alors elle est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

## Exemple rédigé de la démonstration d'une propriété :

Soit  $\mathcal{P}_n$  une proposition qui dépend d'un entier  $n$  naturel. On veut montrer que cette proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq n_0$ .

### On suit la méthode suivante :

- On vérifie que  $\mathcal{P}_{n_0}$  est vraie. (amorçage de la récurrence ou initialisation).
- On démontre que la propriété est héréditaire, c'est-à-dire que si l'on suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie à un rang  $n \geq n_0$  (hypothèse de récurrence), alors  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vraie .  
Alors, on en déduit que  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq n_0$ .

## III Exemples de rédaction

### Exemple 1

Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 5u_n - 4$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
Les premiers termes sont  $u_0 = 3$  ;  $u_1 = 11$  ;  $u_2 = 51$  ;  $u_3 = 251$  ;  $u_4 = 1251$ .

On peut conjecturer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2 \times 5^n + 1$ .

Ce n'est pas parce qu'on le constate sur les premiers termes que l'on eut être sûr que la propriété est vraie pour tous les entiers naturels  $n$ .

Démontrons-le par récurrence.

### Rédaction

Notons  $P_n$  l'affirmation :  $u_n = 2 \times 5^n + 1$ .

Effectuons une démonstration par récurrence :

- **Initialisation** :  $n = 0 : 2 \times 5^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 = u_0 : P_0$  est vraie.
- **Héritéité** : On suppose que  $P_n$  est vraie pour un entier  $n$  quelconque, donc que  $u_n = 2 \times 5^n + 1$ . (**hypothèse de récurrence**).

Il faut alors montrer que  $P_{n+1}$  est vraie (c'est à dire  $u_{n+1} = 2 \times 5^{n+1} + 1$ ).

On a :  $u_{n+1} = 5u_n - 4 = 5\left(\underbrace{2 \times 5^n + 1}_{\text{d'après } P_n}\right) - 4 = 2 \times 5^{n+1} + 5 - 4 = 2 \times 5^{n+1} + 1$ . donc  $P_{n+1}$  est vraie.

**Conclusion :** D'après l'axiome de récurrence, la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exemple 2

Montrons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $7^n - 1$  est pair.

- Il faut d'abord mathématiser l'affirmation, c'est-à-dire l'écrire sous une forme mathématique sur laquelle on peut travailler.
- L'affirmation s'écrit : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un entier relatif  $k_n$  tel que  $7^n - 1 = 2k_n$  (l'entier dépend de  $n$ , donc on ne peut pas utiliser la même lettre pour désigner tous les entiers en question).
- On effectue une démonstration par récurrence avec comme hypothèse de récurrence : « il existe  $k_n \in \mathbb{Z}$  tel que  $7^n - 1 = 2k_n$  ».

- **Initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a  $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 2 \times 0$  donc on obtient bien un nombre pair sous la forme  $2 \times k_0$  avec  $k_0 = 0$ .
- **Héritéité** : on suppose la propriété vraie pour un entier  $n$  quelconque, donc  $7^n - 1 = 2k_n$ ,  $k_n \in \mathbb{Z}$ . Au rang  $n + 1$  :  $7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7 \times (2k_n + 1) - 1 = 7 \times 2 \times k_n + 7 - 1 = 7 \times 2 \times k_n + 6 = 2(7k_n + 3)$  qu'on peut écrire  $2k_{n+1}$  en posant  $k_{n+1} = 7k_n + 3$ . D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n$ .

## IV Utilité des deux étapes

**Montrons sur deux exemples** que si l'on supprime une étape, la démonstration ne donne rien.

**Exemple 1 :** (on a l'amorçage, mais pas l'héritéité) :

On appelle nombre de Fermat le nombre  $F_n = 2^{2^n} + 1$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Fermat (mathématicien français, 1601 - 1665) a affirmé que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  est premier.

Effectivement :  $F_0 = 3$  est premier;  $F_1 = 5$  est premier;  $F_2 = 17$  est premier;  $F_3 = 257$  est premier et  $F_4 = 65537$  est premier.

Comme on ne peut pas montrer que la propriété est hérititaire, on ne peut pas effectuer de démonstration par récurrence et donc pas en déduire que la propriété est vraie pour tout  $n$ .

D'ailleurs  $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$  n'est pas premier, ce que Fermat n'avait pas trouvé (mais trouvé par Euler, calculateur prodige).

En fait, les nombres de Fermat pour  $5 \leq n \leq 32$  ne sont pas premiers. On ne sait pas si  $F_{33}$  est premier ou non.

On a bien l'initialisation, mais pas l'héritéité.

**Pour plus de renseignements sur les nombres de Fermat**, cliquer [ici](#) ou [ici](#)

**Exemple 2 :**

Soit  $P_n$  la propriété : « 6 divise  $7^n + 1$  »

Cette propriété est **héritaire** à partir de  $n = 0$ .

**En effet :** Supposons  $P_n$  vraie donc il existe  $k_n$  tel que  $7^n + 1 = 6k_n$ ,  $k_n \in \mathbb{Z}$ .

Alors  $7^{n+1} + 1 = 7 \times 7^n + 1 = 7(6k_n - 1) + 1 = 42k_n - 6 + 1 = 6(7k_n - 1) + 1 = 6k_{n+1} + 1$  avec  $k_{n+1} = 7k_n - 1 \in \mathbb{Z}$  donc  $P_{n+1}$  est vraie aussi.

$P_{n+1}$  est donc toujours vraie lorsque  $P_n$  l'est.  $P_n$  est une propriété **héritaire**.

On ne peut cependant pas conclure en invoquant l'axiome de récurrence, car nous n'avons pas montré l'initialisation!

**Or  $P_0$  est faux!**

On ne sait donc pas si la propriété est vraie pour d'autres valeurs entières de  $n$  autres que 0.

En fait, la propriété est fausse pour toutes les valeurs entières de  $n$ ! (facile à montrer en spécialité avec les congruences).



### Conclusion

Les deux étapes de la démonstration par récurrence sont bien indispensables!