Correction des exercices sur la dérivation

I

On pose $f(x) = x^3 - x - 1$, où $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 1$.
2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Ici; $a = 2$; $f'2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11$; $f(2) = 8 - 2 - 1 = 5$.
L'équation est donc $y = 11(x-2) + 5 \Leftrightarrow \boxed{y = 11x - 17}$

II

On pose $f(x) = \dfrac{1}{4x-1}$, où $x \in \left]\dfrac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$.

1. $f = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x)/4x-1$.
$f' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x) = 4$ donc $f'(x) = -\dfrac{4}{(4x-1)^2}$ pour tout $x > \dfrac{1}{4}$.

2. $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{4 \times \dfrac{3}{4} - 1} = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$.
$f'\left(\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{4}{2^2} = -1$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\dfrac{3}{4}$ est donc :
$y = -\left(x - \dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = -x + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{y = -x + \dfrac{5}{4}}$.

III

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer l'expression de $f'(x)$, étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f.

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x$.

- On a $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = \boxed{3(x+1)(x-1)}$.
- $f'(x)$ est un trinôme du second degré avec deux racines -1 et 1. Il est positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur des racines; on en déduit que $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\ ;\ -1\cup]1\ ;\ +\infty[$ et donc négatif sur $]-1\ ;\ 1[$.
- Limites : $f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{3}{x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 - \dfrac{3}{x^2}\right) = 1$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to=\infty} x^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = -x + \dfrac{3}{x}$.

- $f(x) = -x + 3 \times \dfrac{1}{x}$ donc $f'(x) = -1 + 3 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -1 - \dfrac{3}{x^2} < 0$ (somme de deux nombres négatifs).
- f est donc décroissante sur chacun des intervalles de l'ensemble de définition.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
$\lim\limits_{x\to0}(-x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\dfrac{3}{x}\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$.
$\lim\limits_{x\to0}(-x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{3}{x}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$.
- Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+5}$.

- $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x-5$ et $v(x) = x+5$.
$f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.
Alors : $f'(x) = \dfrac{2(x+5) - (2x-5)}{(x-5)^2} = \boxed{\dfrac{15}{(x+5)^2}}$.
- Il est clair que $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$.
- Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x\left(2 - \frac{5}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{5}{x}\right)} = \dfrac{2 - \frac{5}{x}}{1 + \frac{5}{x}}$ d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$.
$\lim\limits_{x\to-5}(2x-5) = -15$.
$\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x<-5}}(x+5) = 0$ avec $x+5 < 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x<-5}} f(x) = +\infty$ (quotient de deux nombres négatifs).
$\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x>-5}}(x+5) = 0$ avec $x+5 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x>-5}} f(x) = -\infty$ (quotient de deux nombres de signes contraires).
- On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

d) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{1}{12}.$$

- $f'(x) = \dfrac{1}{6} \times 3x^2 + \dfrac{1}{4} \times 2x - 1 = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - 1 = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + x - 2\right)$.
$x^2 + x - 2$ a pour racines 1 et 2 (en calculant le discriminant)

d'où $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$.

On en déduit que $\boxed{f'(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)}$.

On peut aussi remarquer que 1 est une « racine évidente » et factoriser « à vue » par $x-1$ sachant que le facteur manquant est un polynôme du premier degré.

- $(x-1)(x+2)$ est positif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et négatif entre les racines.
- Les limites à l'infini sont faciles à calculer en mettant x^3 en facteur.
- On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{7}{4}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

IV

On pose $f(t)=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}$, $t\neq 0$.

1. $f(t)=\frac{1}{2+}2\times\frac{1}{t}$ donc $f'(t)=\frac{1}{2}+2\times\left(-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{2}{t^2}=\frac{t^2-4}{2t^2}=\frac{(t+2)(t-2)}{2t^2}$.
   $f'(t)$ s'annule donc en -2 et 2 et t^2-4 est positif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.
2. Les limites n'étaient pas demandées, mais sont « évidentes ».
3. Variations de f :

t	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

V

On modélise la concentration dans le sang, en microgramme par litre (μg.L^{-1}) d'un anesthésiant, t heures après son administration par la fonction

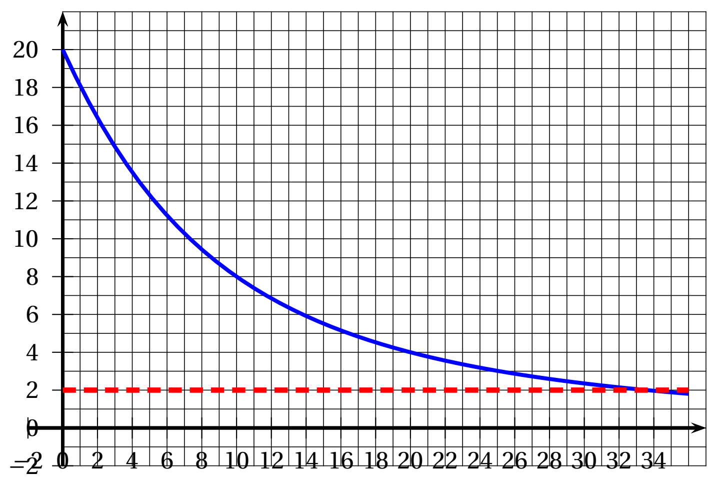
$$f : t \mapsto \frac{20}{0,005t^2+0,1t+1}$$

où $t\in[0\,;\,36]$.

1. $f(t)=20\times\frac{1}{0,005t^2+0,1t+1}$ donc $f=20\times\frac{1}{u}$ avec $u(t)=0,005t^2+0,1t+1$.
   $f'=20\times\left(-\frac{u'}{u^2}\right)$ avec $u'(t)=0,01t+0,1$.
   On en déduit : $\boxed{f'(t)=-20\times\frac{0,01t+0,1}{\left(0,005t^2+0,1t+1\right)^2}}$.
2. Il est clair que f' est négative sur $[0\,;\,36]$ donc f est décroissante.
   La concentration de l'anésthésiant décroît au cours du temps.
3. $f(0)=20$; on cherche t tel que $f(t)\leqslant 2$ (la valeur est unique par décroissance de la fonction f).

   - À la calculatrice, on trouve $t\approx 33,6$ h, donc 33 h 36 s.
   - On peut aussi chercher la valeur exacte.
     $f(0)=20$ donc cherche t positif tel que $f(t)\leqslant 2$.
     $f(t)\leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{20}{0,005t^2+0,1t+1}\leqslant 2$
     $\Leftrightarrow \frac{20}{0,005t^2+0,1t+1}-2\leqslant 0$
     $\Leftrightarrow \frac{-0,01t^2+0,2t+18}{0,005t^2+0,1t+1}\leqslant 0$
     $\Leftrightarrow -0,01t^2+0,2t+18\leqslant 0$ (sur $[0;36]$).
     En multipliant par 100, cela équivaut à
     $-t^2+20t-1800\leqslant 0$.
     $\Delta=400+4\times 1\times 1800=7600>0$.
     Il y a deux racines :
     $t_1=\frac{20+\sqrt{7600}}{-2}=\frac{20+20\sqrt{19}}{-2}=-10\left(1+\sqrt{19}\right)$.
     $t_2=\frac{20-\sqrt{7600}}{-2}=\frac{20-20\sqrt{19}}{-2}=-10\left(1-\sqrt{19}\right)\approx 33,6$.
     On trouve que t doit être à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines avec $t\in[0\,;\,36]$ donc
     $t\in[10\left(\sqrt{19}-1\,;\,\right)\,;\,36]$

   Courbe (non demandée) :



VI

On considère une entreprise qui produit du jus de fruits. Sa capacité quotidienne de production est égale à 600 L, et, pour x hL de jus de fruits, le coût total de production quotidien est donné, en dizaines d'euros par

$$C(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+7x+50 \text{ où } x\in[0\,;\,6]$$

.

1. $C(0)=\boxed{50\neq 0}$; ce sont les frais fixes.
2. (a) On peut envisager que le coût total de production soit **croissant**.

(b) $C'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 7$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times \dfrac{3}{2} \times 7 = 36 - 6 \times 7 = 36 - 42 = -6 < 0$.

Ce polynôme du second degré n'a donc pas de racine ; il est du signe du coefficient de x^2 donc positif.

$C' > 0$ donc la fonction C est bien **croissante**.

3. Le coût moyen de fabrication de x hL, si x hL ont déjà été produits, avec $x > 0$, est défini par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

(a) $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ donc

$$C'_M(x) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$$
$$= \frac{\left(\frac{3}{2}x^2 - 6x + 7\right)x - \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 7x + 50\right)}{x^2}$$
$$= \frac{\frac{3}{2}x^3 - 6x^2 + 7x - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 7x - 50}{x^2}$$
$$= \boxed{\frac{x^3 - 3x^2 - 50}{x^2}}.$$

$(x-5)\left(x^2 + 2x + 10\right) = x^3 + 2x^2 + 10x - 5x^2 + 10x - 50$
$= x^3 + 2x^2 + 10x - 5x^2 - 10x - 50 = x^3 - 3x^2 - 50$.

On en déduit que : $\boxed{C'_M(x) = \dfrac{(x-5)\left(x^2 - 2x + 10\right)}{x^2}}$

(b) $x - 5$ s'annule et change de signe en 5.

Pour $x^2 - 2x + 10$, $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 10 < 0$ donc $x^2 - 2x + 10$ ne s'annule pas et est positif (du signe du coefficient de x^2).

Tableau de variation de C_M :

x	0		5		6
$x-5$		$-$	0	$+$	
$x^2-2x+10$		$+$		$+$	
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$		$\searrow$	$\dfrac{145}{2}$	$\nearrow$	

On en déduit que le coût moyen est minimal pour $x = 5$.

(c) En sciences économiques, on appelle coût marginal le coût de production d'une unité supplémentaire.

Ce coût, qui dépend de la quantité x déjà produite, est modélisé par la fonction C', dérivée de C.

Ce coût marginal vaut $C'(5) = \dfrac{29}{2}$ et $C_M(5) = \dfrac{29}{2}$ donc $\boxed{C_M(5) = C'(5)}$