Spécialité de Terminale : devoir sur feuille n° 1

I

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

($\sum_{k=1}^{k=n}$ se lit « somme pour k allant de 1 à n »)

II

On considère la fonction f définie sur $[-5\,;\,-1[\cup]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,4]$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}.$$

PARTIE A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur [-5; 4] par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Calculer $g'(x)$ et faire le tableau de variation de g.
2. Montrer, à l'aide du tableau de variation de g, que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α unique sur l'intervalle [-5; 4], puis déterminer une valeur approchée de α à 0,1 près à l'aide de la calculatrice.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur [-5; 4].

PARTIE B

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$.
2. Etudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.
3. Vérifier que $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$.
4. Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d"équation $y = x + 2$. (en étudiant le signe de $f(x) - (x+2)$).
5. En déduire que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (x+2)\right] = 0$; on dit que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.
6. Tracer dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ (unités :1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées) les droites d'équation $x = -1$, $x = 1$, $y = x + 2$ et la courbe $\mathscr{C}$.

III

Parmi tous les rectangles de périmètre égal à 40, le but est de trouver ceux dont l'aire est maximale.

1. On appelle x une des dimensions du rectangle; montrer que l'autre dimension vaut $20 - x$.
2. En déduire l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle en fonction de x.
3. En étudiant les variations de la fonction $\mathscr{A}$, répondre à la question.

IV

Cet exercice propose de comprendre sur un exemple, pourquoi certains objets usuels ont tous la même forme.

Pour réduire les coûts de fabrication, une entreprise doit fabriquer des casseroles cylindriques de volume v donné en utilisant le moins de métal possible. (on ne tient pas compte du manche)

On. note h la hauteur d'une casserole, x le rayon du disque du fond et S l'aire totale (aire latérale + aire du fond).

1. Montrer que $S = \pi x^2 + \dfrac{2v}{x}$.
2. Étudier les variations de la fonction
$$f : x \mapsto \pi x^2 + \frac{2v}{x} \text{ sur }]0\,;\,+\infty[.$$
3. En déduire, pour un volume v fixé, la valeur de x pour laquelle le coût de fabrication d' une casserole est le plus bas.