Exercices sur la dérivation

I

On pose $f(x) = x^3 - x - 1$, où $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 2.

II

On pose $f(x) = \dfrac{1}{4x-1}$, où $x \in \left]\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$.

1. Pour tout $x > \dfrac{1}{4}$, calculer $f'(x)$.
2. Montrer que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\dfrac{3}{4}$ est $y = -x + \dfrac{5}{4}$

III

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{1-2x}$.

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?
2. Calculer $f'(x)$ sur $\mathscr{D}$.
3. Que peut-on en déduire pour f ?
4. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

IV

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer l'expression de $f'(x)$, étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f.

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x$.

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = -x + \dfrac{3}{x}$.

c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+5}$.

d) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{1}{12}.$$

V

On pose $f(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{2}{t}$, $t \neq 0$.

1. Calculer $f'(t)$.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

VI

On modélise la concentration dans le sang, en microgramme par litre (μg.L^{-1}) d'un anesthésiant, t heures après son administration par la fonction

$$f : t \mapsto \frac{20}{0{,}005t^2 + 0{,}1t + 1}$$

où $t \in [0\,;\,36]$.

1. Calculer $f'(t)$ où $t \in [0\,;\,36]$.
2. En déduire le sens de variation de f et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. On estime qu'un patient auquel on a administré cet anesthésiant peut rentrer chez lui quand la concentration du médicament est inférieure à 10 % de sa concentration au moment de son administration.
Après combien d'heures ce patient pourra-t-il rentrer chez lui ?

VII

On considère une entreprise qui produit du jus de fruits. Sa capacité quotidienne de production est égale à 600 L, et, pour x hL de jus de fruits, le coût total de production quotidien est donné, en dizaines d'euros par

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x^2 + 7x + 50$$

où $x \in [0\,;\,6]$.

1. Vérifier que $C(0) \neq 0$. Donner une explication concrète de ce fait.
2. (a) Quelle conjecture peut-on formuler sans calcul sur le sens de variation de C sur $[0;\,6]$? Expliquer.

   (b) Prouver cette conjecture par le calcul.
3. Le coût moyen de fabrication de 1 hL, si x hL ont déjà été produits, avec $x > 0$, est défini par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

   (a) Montrer que, pour tout x dans $]0;\,6]$, on a :

$$C'_M(x) = \frac{(x-5)\left(x^2 - 2x + 10\right)}{x^2}$$

   (b) En déduire la quantité de production pour laquelle le coût moyen est minimal et préciser ce coût en euro.

   (c) En sciences économiques, on appelle coût marginal le coût de production d'une unité supplémentaire.
   Ce coût, qui dépend de la quantité x déjà produite, est modélisé par la fonction C', dérivée de C.
   Montrer que lorsque le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal.