TS spécialité : contrôle (2 heures)

I

Trouver le reste de la division euclidienne par 5 du nombre 12^{1527}.

II

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} \equiv 2^n$ [7].
2. Que peut-on en déduire pour le nombre $3^{2n} - 2^n$?

III

Déterminer les entiers naturels n tels que $N = n^2 - 3n + 6$ soit divisible par 5

IV

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^{2n} - 1$ est divisible par 4.

V

1. (a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1$ [7].
   (b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 22 009 par 7 ?
2. Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
   On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$.
   On rappelle qu'en base 10, ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
   On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
   (a) Vérifier que $10^3 \equiv -1$ [7].
   (b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

VI

1. **Restitution organisée de connaissances**
   Prérequis :
   Soient a et b deux entiers relatifs et soit n un entier naturel non nul.
   $a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow a - b$ est un multiple de n.
   (a) Montrer à l'aide du prérequis que $a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow a = b + kn,\ k \in \mathbb{Z}$.
   (b) En déduire que la relation de congruence est compatible avec la multiplication, c'est-à-dire que si $a \equiv b\ [n]$ et $a' \equiv b'\ [n]$, alors $aa' \equiv bb'\ [n]$
2. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.
3. (a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 851 par 7.
   (b) En déduire alors, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n$ par 7.
4. On considère le nombre B s'écrivant en base 4 : $B = \overline{2103211}^4$.
   Déterminer, dans le système décimal, le reste de la division euclidienne de B par 4.

Correction

VII

1. (a) On a $2^3 = 8$ et $8 \equiv 1$ [7].
   D'après la règle de compatibilité avec les puissances, on a : $(2^3)^k \equiv 1^k$ [7] et donc $2^{3k} \equiv 1$ [7].

   (b) Reste dans la division euclidienne de 22 009 par 7 :
   On a $2\,009 = 3 \times 669 + 2$, donc d'après la question précédente, on a :
   $23 \times 669 \equiv 1$ [7]
   $23 \times 669 \times 2^2 \equiv 4$ [7]
   $2^{2\,009} \equiv 4$ [7]
   Le reste de $2^{2\,009}$ par la division par 7 est 4.

2. Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
   On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$.

   (a) $1\,001 = 7 \times 143$, donc $1\,001 \equiv 0$ [7] et donc $1\,000 \equiv -1$ [7]

   (b) On doit donc avoir :
   $b - a \equiv 0$ [7] ; de plus, comme a et b sont des chiffres (a non nul), on $a - 9 \leqslant b - a \leqslant 8$.
   Nous avons donc les équations suivantes :
   $b - a = -7$; $b - a = 0$; $b - a = 7$ ce qui donne comme possibilités :