Rappels sur le second degré

Table des matières

On appelle polynôme du second degré une expression du type ax^2+bx+coù a, b et c sont réels, avec $a \neq 0$.

I Forme canonique

Pour résoudre une équation polynomiale du second degré ou trouver le signe de ax^2+bx+c, on commence par transformer le polynôme du second degré pour le mettre sous sa forme dite « **forme canonique** ».

$ax^2+bc+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$
$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$.

On pose $\boxed{\Delta = b^2-4ac}$ (**discriminant**).

Alors : $ax^2+bc+c = \boxed{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]}$ (**forme canonique**)

II Équation $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$

L'équation $ax^2+bc+c=0$ s'écrit successivement $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{5a^2}\right]=0$, puis, en divisant par a non nul :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{5a^2}=0$$

On est amené à distinguer trois cas, selon le signe de Δ.

- **Premier cas :** $\Delta<0$
  Comme $\Delta<0$, $-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ (car $4a^2>0$).
  $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ comme carré d'un nombre réel.
  Par somme, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta<0}{4a^2}>0$ (comme somme de deux nombres positifs) pour tout x.
  L'équation $ax^2+bc+c=0$ n'a donc **aucune** solution.

- **Deuxième cas :** $\Delta=0$.
  Alors l'équation $ax^2+bc+c=0$ s'écrit $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{5a^2}=0$ puis $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ puisque $\Delta=0$.
  On obtient $x+\frac{b}{2a}=0$ donc $x=-\frac{b}{2a}$.
  L'équation a **une seule** solution : $x=-\frac{b}{2a}$.

- **Troisième cas :** $\Delta = 0$.
  Alors l'équation $ax^2+bc+c=0$ s'écrit $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{5a^2}=0$
  d'où $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$.
  On factorise avec la troisième identité remarquable (différence de deux carrés) :
  On obtient $\left[x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0$
  donc $\left[x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0$.
  On produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

  a) $x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ donc $x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  b) $x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ donc $x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

  L'équation a donc **deux** solutions : $\boxed{x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

Résumé :

- $\Delta < 0$: pas de solution
- $\Delta = 0$: une solution : $x=-\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$: deux solutions :
  $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples :

- Soit l'équation $2x^2-3x+12=0$; $\Delta=(-3)^2-4\times2\times12=9-96=-87<0$.
  $\Delta<0$ donc l'équation n'a pas de solution : $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$.
- Soit l'équation $2x^2+12x+18=0$.
  $\Delta=12^2-4\times2\times18=144-144=0$.
  L'équation a une solution : $x=-\dfrac{b}{2a}$ avec $a=2$ et $b=12$, donc $x=-\dfrac{12}{4}=-3$; $\boxed{\mathscr{S}=\{3\}}$.
- $3x^2+5x+1=0$; $\Delta=b^2-4ac$ avec $a=3$, $b=5$ et $c=1$ donc $\Delta=13>0$.
  L'équation a deux solutions :
  $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{6}$.
  $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{6}$.
  L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{-5-\sqrt{13}}{6}\ ;\ \dfrac{-5+\sqrt{13}}{6}\right\}}$

III Signe de $ax^2 + bx + c$

On repart de la forme canonique : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{4a^2}\right]$.

On retrouve trois cas, selon le signe de Δ.

- $\Delta < \mathbf{0}$.
  Alors $\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{4a^2}\right] > 0$ donc $ax^2 + bx + c$ est du signe de a, coefficient de x^2.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	Signe de a

- $\Delta = \mathbf{0}$.
  $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.
  $x + \dfrac{b}{2a}$ s'annule pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ donc $ax^2 + bx + c$ est nul pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ et du signe de a pour les autres valeurs de a

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de a	

- $\Delta > \mathbf{0}$.
  En reprendra tels calculs du II, on obtient $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
  On suppose que $x_1 < x_2$ (le résultat final est le même si $x_2 < x_1$) On renseigne alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

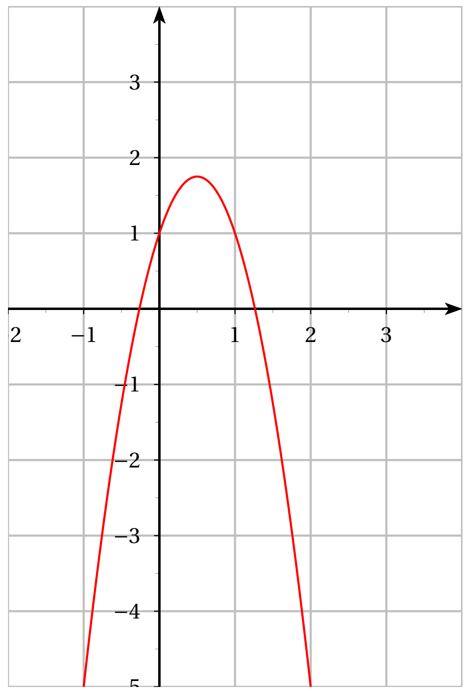
Exemples :

- Signe de $2x^2 - 3x + 3$.
  $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 9 - 24 = -15 < 0$.
  Comme $\Delta < 0$, l'expression est du signe de $a = 2$ pour tout x, donc positif pour tout x.

- Signe de $-3x^2 + 3x + 1$.
  $\Delta = 3^2 - 4 \times (-3) \times 1 = 9 + 12 = 21$.
  Les deux racines sont :
  $x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{21}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-3 - \sqrt{21}}{-6} = \dfrac{3 + \sqrt{21}}{6}$.
  $x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{21}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-3 + \sqrt{21}}{-6} = \dfrac{3 - \sqrt{21}}{6}$.
  On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{21}}{6}$		$\frac{3+\sqrt{21}}{6}$		$+\infty$
Signe de $-3x^2+3x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Remarque : la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -3x^2+3x+1$ est une parabole tournée vers le bas, puisque le coefficient de x^2 est négatif (cours de seconde).
Voilà la courbe :



On retrouve bien les signes annoncés.