TS3 : devoir sur feuille n° 1

‘

I

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

II

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{(2x+1)(3x-4)}{(x+1)(x+3)} \leqslant 0$.

III

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 6$,

$$2^n > 6n + 7.$$

IV

$P(n)$ est la propriété : « $4^n + 1$ est un multiple de 3 » où n désigne un entier naturel.

1. Montrer que cette propriété est héréditaire.
2. Peut-on en déduire qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

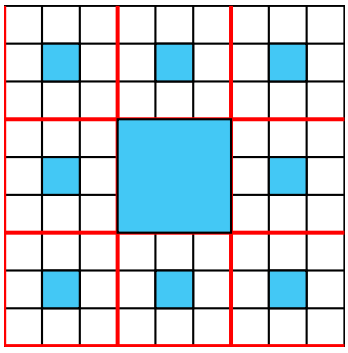
V

t est la suite définie par $t_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

1. Écrire t_1, t_2 et t_3 sous forme de fraction irréductible.
2. Émettre une conjecture sur l'expression de t_n sous forme de fraction ;
3. Démontrer par récurrence l'expression conjecturée au 2.

VI

Un carré d'aire 1 m^2 est divisé en neuf carrés identiques comme indiqué sur la figure ci-dessous.
On colorie le carré central. Les huit carrés restant sont tour à tour divisés en neuf carrés égaux. on poursuit avec la même méthode la division et le coloriage du carré.
Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_n l'aire, en m^2, de la surface totale coloriée après n coloriages.
Ainsi a-t-on $A_1 = \dfrac{1}{9}$.

1. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n :
$$A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}.$$
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose
$$B_n = A_n - 1.$$
   (a) Montrer que la suite (B_n) est géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, l'expression de B_n puis de A_n en fonction de n.
   (c) Étudier la limite de la suite (A_n).
   (d) Déterminer à partir de combien d'étapes on aura 85 % du carré initial.