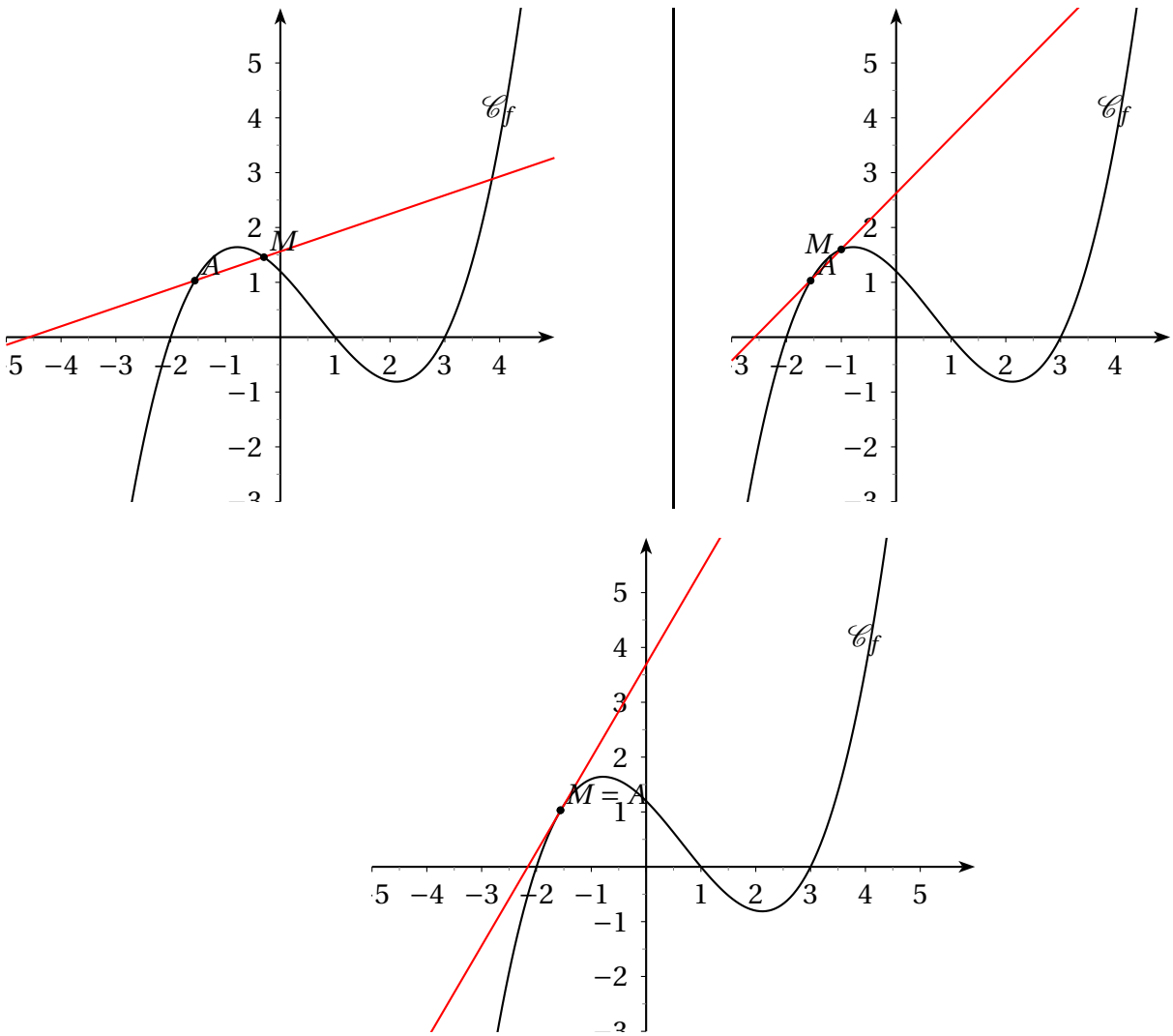
Fonctions numériques : dérivation

Table des matières

I Notion de tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et soit A un point fixe de $\mathscr{C}_f$. Soit M un point variable de $\mathscr{C}_f$. On trace la droite (AM) qui est sécante à $\mathscr{C}_f$. On fait tendre M vers A. Si, lorsque M tend vers A, la sécante admet une position limite, on dit que cette limite est tangente à $\mathscr{C}_f$.



II Nombre dérivé de f en a et fonction dérivée :

Définition

Notons a l'abscisse de A et x l'abscisse de M. Le coefficient directeur de la sécante (AM) est : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Dire que la sécante a une position limite qui est la droite tangente à $\mathscr{C}_f$ en A signifie que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe.

Si ce nombre **existe** et s'il est **fini**, on pose : $\mathbf{f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ et ce nombre est le **nombre dérivé** de f en a.

On dit alors que f est dérivable en a.

Remarque :

En posant $x=a+h$, on obtient : $\mathbf{f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$.

Par définition, $f'(a)$ est **le coefficient directeur de la tangente** à $\mathscr{C}_f$ en a.

Propriété

L'équation de la tangente est alors : $\mathbf{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

Démonstration :

Rappel : la droite, de coefficient directeur a et passant par le point M_0 de coordonnées $(x_0\,;\,y_0)$ a pour équation $y-y_0=a(x-x_0)$.

En effet, l'équation est de la forme $y=ax+b$.

Comme M_0 appartient à cette droite, ses coordonnées vérifient cette équation, donc $y_0=ax_0+b$.

Par conséquent : $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & ax+b \\ y_0 & = & ax_0+b \end{array}\right.$.

Par soustraction, on obtient : $y-y_0=a(x-x_0)$.

Pour la tangente, on obtient donc : $y-y_A=f'(a)(x-x_A)$ qui donne $y=f'(a)(x-x_A)+f(a)$.

Définition

f est dérivable sur un intervalle ouvert I si f est dérivable en tout a de I.

Remarque

La dérivée f' de f est elle-mÍme une fonction. Si elle est dérivable, on appelle f'' sa dérivée (dérivée seconde de f).

Cette dérivée seconde peut elle-mÍme Ítre dérivable et ainsi de suite. Les dérivées d'ordre n, avec $n\geqslant 3$, se notent $f^{(n)}$.

Ainsi : $f''=(f')'$; $f^{(3)}=(f'')'$ et plus généralement $f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$

Exemples :

1. Soit $f(x)=3x^4+5x^2+2x+1$.
   On a : $f'(x)=12x^3+10x+2$; $f''(x)=36x^2+10$; $f^{(3)}(x)=72x$: $f^{(4)}(x)=72$; $f^{(5)}(x)=0$ et les dérivées suivantes sont toutes égales à la fonction nulle.
2. Soit $f(x)=\sin x$.
   Alors : $f'(x)=\cos x$; $f''(x)=-\sin x$; $f^{(3)}(x)=-\cos x$; $f^{(4)}(x)=\sin x=f(x)$. On retombe sur la fonction initiale.

3. Imaginons qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, $f'(x) = f(x)$. f est-elle dérivable à l'ordre 3 si oui, que vaut $f^{(3)}$?
Réponse : $f' = f$ donc f' est dérivable et $f'' = (f')' = f'$ et de mÍme $f^{(3)} = f$.
On pourrait alors montrer par récurrence, que la fonction f vérifie alors : pour tout n, $f^{(n)} = f$.
On étudiera cette fonction plus en détail dans un prochain chapitre.

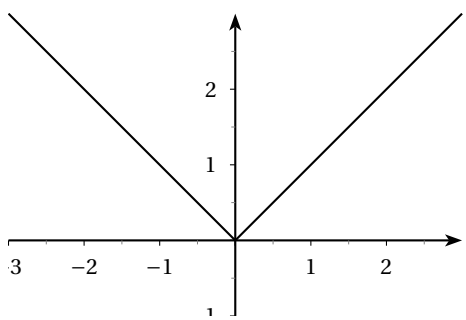
Exercices

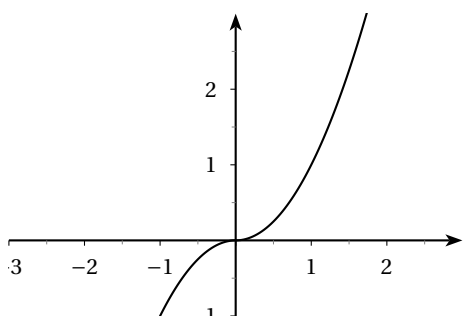
- Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
- ...tudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto x|x|$ en 0.

Solutions :

- Soit f la fonction $x \mapsto |x|$.
$\forall x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|-0}{x-0} = \dfrac{|x|}{x}$.
Si $x < 0$, $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$ et pour $x > 0$, $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$.
On en déduit que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-1) = -1$, alors que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1) = 1$.
La limite à gauche et à droite n'est pas la mÍme, donc la limite en 0 n'existe pas ; f n'est pas dérivable en 0 (mais l'est à gauche et à droite) ; on dit que la courbe admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite.
- Soit $g : x \mapsto x|x|$. Cette fois, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (|x|) = 0$; la limite existe, donc la fonction g est dérivable en 0 et la courbe représentative de g a une tangente en 0.

Voici les deux représentations graphiques de f et de g.





III Tableau des dérivées usuelles :

Fonction f définie par :	Fonction f' définie par :	Intervalle de validité
$f(x) = k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$

IV Dérivées et opérations :

Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

- $(ku)' = ku'$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, $u(x) \neq 0$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v(x) \neq 0$

ThéorËme (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en $a \in I$; alors, f est continue en a

Attention, la réciproque est fausse ; une fonction peut Ître continie en a, mais pas dérivable ; exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ en 0.

V Dérivée de la composée de quelques fonctions :

V.1 Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Propriété

Soit u une fonction définie, positive et dérivable sur un intervalle I., de fonction dérivée u'.

La fonction f définie sur I par $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable en tout nombre x tel que $u(x) \neq 0$ et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration :

Démonstration :

Soit $x \in I$ tel que $u(x) > 0$. Soit J un intervalle de I contenant I.

Soit h un réel non nul, tel que $x + h \in J$.

Soit $A(h) = \dfrac{\sqrt{u(x+h) - u(x)}}{h}$ et on étudie la limite quand h tend vers 0.

$$A(h) = \frac{\left[\sqrt{u(x+h)} - \sqrt{u(x)}\right] \times h\left[\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}\right]}{\left[\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}\right]} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h\left[\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}\right]} \text{ (avec } \sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)} > 0\text{)}.$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}\right) = u'(x)$; $\lim\limits_{h \to 0} u(x+h) = u(x)$ par continuité de u donc $\lim\limits_{h \to 0}\left[\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}\right] = 2\sqrt{u(x)}$.

On en déduit que $\lim\limits_{h \to 0} A(h) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ cqfd.

Exemple : $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 7}$ définie sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 5x + 7$ et $u'(x) = 6x + 5$.

Alors : $\boxed{f'(x) = \dfrac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+7}}}$.

V.2 Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit u' sa fonction dérivée. et soit n un entier relatif non nul.

La fonction u^n est dérivable et $\left(u^n\right)' = nu' \times u^{n-1}$.

Démonstration Soit $A(h) = \dfrac{u^n(x+h) - u^n(x)}{h}$. On doit étudier la limite de $A(h)$ quad h tend vers 0.

On a vu en premiËre que la fonction $f : x \mapsto x^n$ est dérivable et que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Cela signifie que $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}}$.

En changeant de lettre, on a : $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{(z+k)^n-z^n}{k}=nz^{n-1}$

Posons $\varepsilon(k)=\dfrac{(z+k)^n-z^n}{k}-nz^{n-1}$. On a $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(k)=0}$.

On obtient, aprËs transformation :

$\dfrac{(z+k)^n-z^n}{k}=nz^{n-1}+\varepsilon(k)$ donc $(z+k)^n-z^n=\left(nz^{n-1}+\varepsilon(k)\right)\times k$

On pose alors $u(x)=z$ et $u(x+h)=z+k$.

$u^n(x+h)-u^n(x)=(z+k)^n-z^n=\left(nz^{n-1}+\varepsilon(k)\right)\times k=\left(nu^{n-1}(x)+\varepsilon\left(u(x+h)-u(x)\right)\right)\times\left(u(x+h)-u(x)\right)$.

On en déduit :

$$\boxed{\frac{u^n(x+h)-u^n(x)}{h}=\left(nu^{n-1}(x)+\varepsilon\left(u(x+h)-u(x)\right)\right)\times\frac{u(x+h)-u(x)}{h}}$$

On a : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}\right)=u'(x)$ car la fonction u est dérivable.

La fonction u est continue, donc $\lim\limits_{h\to 0}u(x+h)=u(x)$ donc $\lim\limits_{h\to 0}[u(x+h)-u(x)]=0$.

Alors : $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon\left(u(x+h)-u(x)\right)=\lim\limits_{k\to 0}\varepsilon(k)=0$ en posant $k=u(x+h)-u(x)$.

Par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0}\left(nu^{n-1}(x)+\varepsilon\left(u(x+h)-u(x)\right)\right)=nu^{n-1}(x)$.

Alors : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{u^n(x+h)-u^n(x)}{h}\right)=nu^{n-1}(x)\times u'(x)}$.

Exemples :

1. Soit $f:x\mapsto\left(3x^2+5x-7\right)^5$; $f=u^5$ avec $u(x)=\left(3x^2+5x-7\right)^5$.
   On a alors $f'=\left(u^7\right)'=7u'u^{7-1}=7u'u6$ avec $u'(x)=6x+5$.
   Par conséquent : $\boxed{f'(x)=7(6x+5)\left(3x^2+5x-7\right)^6}$.
2. Soit $f:x\mapsto\dfrac{1}{\left(x^2+x+1\right)^5}$ sur $\mathbb{R}$.
   On a $f(x)=\left(x^2+x+1\right)^{-5}$ donc $f=u^{-5}$ avec $\begin{cases}n=-5\\u(x)=x^2+x+1\end{cases}$.
   $f'=nu'u^{n-1}=-5u'u^{-6}=-\dfrac{5u'}{u^6}$ avec $u'(x)=2x+1$.
   Par conséquent : $f'(x)=-\dfrac{5(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^6}$

V.3 Dérivée de la fonction $x\mapsto f(ax+b)$

Propriété

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et deux nombres a et b.
La fonction $g:x\mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $g'x\mapsto a\times f'(ax+b)$.

Démonstration

$\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\dfrac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h}=\dfrac{f(ax+b+ah)-f(x)}{h}=a\times\dfrac{f(ax+b+ah)-f(x)}{ah}$.

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(ax+b+ah)-f(x)}{ah}\right)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(ax+b+k)-f(ax+b)}{k}=f'(ax+b)$.

On en déduit : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\boxed{a\times f'(ax+b)}$.

Exemple : Soit $f : x \mapsto \cos(2x+3)$; $f'(x) = 2\cos'(2x+3) = \boxed{-2\sin(2x+3)}$.

V.4 Dérivée de $\sin u$ et $\cos u$

Propriété admise : si u est dérivable, $\sin u$ est dérivable et $\cos u$ est dérivable.

- $(\sin u)' = u' \times \sin' u = u' \cos u$
- $(\cos u)' = u' \times \cos' u = -u' \sin u$

Exemple : soit $f(x) = \sin\left(x^2\right)$.
$f = \sin u$ avec $u(x) = x^2$.
$f' = u' \cos u$ avec $u'(x)2x$ donc $\boxed{f'(x) = 2x\cos\left(x^2\right)}$

V.5 Dérivée de $f \circ g$

ThéorËme admis

Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans J et f une fonction définie et dérivable sur J.
Alors $f \circ g$ est dérivable et $\left(f \circ g\right)' = g' \times \left(f' \circ g\right)$.
Pour tout $x \in I$, $\left(f \circ g\right)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$.

VI Application de la dérivabilité :

VI.1 Utilisation du nombre dérivé pour le calcul de certaines limites :

On sait que si f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

Exemple : $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

VI.2 Sens de variation d'une fonction :

ThéorËme (admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.
Si f' est strictement positive sur I sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs o˘ elle s'annule, alors f est croissante sur I.
Si f' est strictement négative sur I sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs o˘ elle s'annule, alors f est décroissante sur I.

Exemple :
Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 0$.
On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

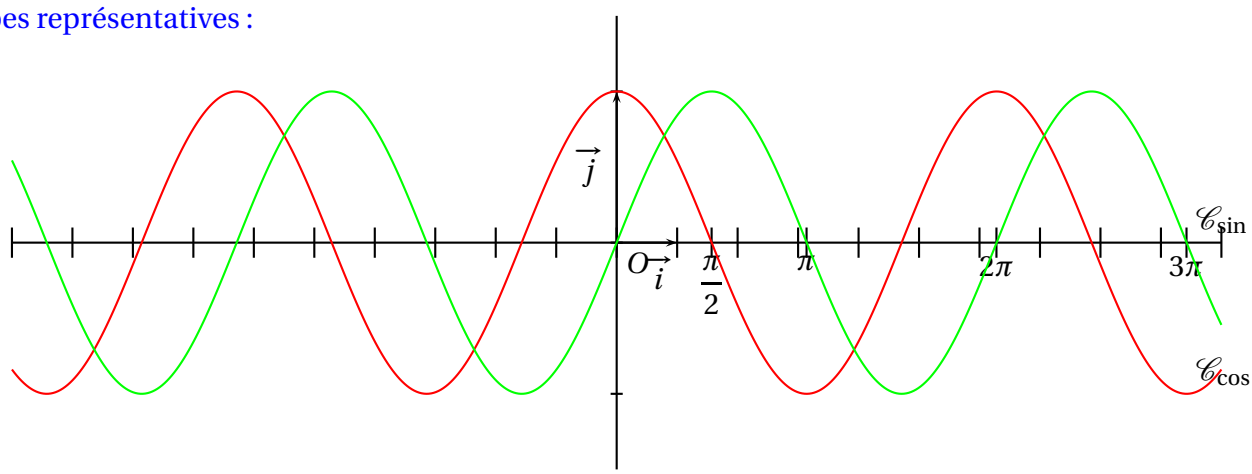
1. ...tudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\cos x - 2 + x^2$.
2. En déduire la comparaison des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Solution :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2\sin x + 2x$. Pour étudier le signe de $f'(x)$, dérivons f'. $f''(x) = -2\cos x + 2 = 2(1-\cos x) \geq 0$. f' est croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $f'(0) = 0$, on en déduit le signe de f'.
   On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Le minimum $f(0)$ vaut 0, donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

VII ...tude de fonctions trigonométriques :

VII.1 Rappels sur les fonctions cosinus et sinus :

Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos(x+2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x+2\pi) = \sin x.$$
   On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $\cos(-x) = \cos x$.On dit que la fonction est **paire** .
   Les points de coordonnées $(x\ ;\ \cos x)$ et $(-x\ ;\ \cos(-x))$ appartiennent à la courbe représentative de la fonction cosinus et sont symétriques par rapport à la l'axe des ordonnées, donc la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à cet axe.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $\sin(-x) = -\sin x$. La fonction sinus est **impaire**, donc la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à O.
4. Puisque les fonctions sont périodiques, on ne les étudie et on ne les trace que sur des intervalles de longueur 2π, qu'on peut réduire à des intervalles de longueur π en utilisant la parité ou l'imparité.
5. La fonction cosinus est décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$. La fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.
6. Courbes représentatives :