Démonstration par récurrence

Exemple introductif :

Imaginons que des ouvriers construisant un immeuble aient toutes les instructions nécessaires pour construire un étage d'immeuble sur le même modèle que l'étage qui est au-dessous.
Ainsi peuvent-ils construire le deuxième (identique au premier), le troisième (identique au deuxième), le quatrième (identique au troisième) et ainsi de suite ; on peut imaginer qu'ils peuvent alors construire un immeuble aussi haut que l'on veut (en négligeant les contraintes de résistance des matériaux qui limitent les hauteurs d'immeubles).

Le seul problème est qu'il faut **d'abord avoir construit indépendamment** le premier étage, car on ne peut pas prendre pour modèle un étage précédent, puisqu'il n'y en a pas !

Principe d'une démonstration par récurrence :

Ce principe est basé sur la description de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels :

- Il existe un plus petit entier, 0.
- Chaque entier autre que 0 s'obtient en ajoutant 1 à son prédécesseur.

Axiome de récurrence :

Si une propriété est vraie pour l'entier naturel n_0 et s'il est prouvé que, lorsqu'elle est vraie pour un entier p quelconque supérieur ou égal à n_0, alors elle est vraie pour $p+1$, alors elle est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple rédigé de la démonstration d'une propriété :

Soit $\mathscr{H}_n$ une proposition qui dépend d'un entier n naturel. On veut montrer que cette proposition $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

On suit la méthode suivante :

- On vérifie que $\mathscr{H}_{n_0}$ est vraie. (amorçage de la récurrence ou initialisation).

- On démontre que la propriété est héréditaire, c'est-à-dire que si l'on suppose que $\mathscr{H}_n$ est vraie à un rang $n \geq n_0$ (hypothèse de récurrence), alors $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie .

Alors, on en déduit que $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Rédaction

Notons $\mathscr{H}_n$ l'affirmation : $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Effectuons une d**émonstration par récurrence** :

- Amorçage : $n = 0$: $2 \times 5^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 = u_0$: $\mathscr{H}(0)$ est vraie.
- Hérédité : On suppose que $\mathscr{H}(n)$ est vraie poiur un entier n quelconque, donc que $u_n = 2 \times 5^n + 1$. (hypothèse de récurrence).

Il faut alors montrer que $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

On a : $u_{n+1} = 5u_n - 4 = 5\left(2 \times 5^n + 1\right) - 4 = 2 \times 5^{n+1} + 5 - 4 = 2 \times 5^{n+1} + 1$. donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, la propriété $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

Les deux étapes de la démonstration par récurrence sont indispensables !

Montrons sur deux exemples que si l'on supprime une étape, la démonstration ne donne rien.

Exemple 1 : (on a l'amorçage, mais pas l'hérédité) :
On appelle nombre de Fermat le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$, $(n \in \mathbb{N})$.
Fermat (mathématicien français, 1601 - 1665) a affirmé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est premier.
Effectivement : $F_0 = 3$ est premier ; $F_1 = 5$ est premier ; $F_2 = 17$ est premier ; $F_3 = 257$ est premier et $F_4 = 65\,537$ est premier.
Comme on ne peut pas montrer que la propriété est héréditaire, on ne peut pas effectuer de démonstration par récurrence et donc pas en déduire que la propriété est vraie pour tout n.

D'ailleurs $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$ n'est pas premier, ce que Fermat n'avait pas trouvé (mais trouvé par Euler).
En fait, les nombres de Fermat pour $5 \leqslant n \leqslant 32$ ne sont pas premiers. On ne sait pas si F_{33} est premier ou non.
On a bien l'initialisation, mais pas l'hérédité.

Pour plus de renseignements sur les nombres de Fermat, cliquer ici ou ici

Exemple 2 :
Soit P_n la propriété : « 6 divise $7^n + 1$ »
Cette propriété est **héréditaire** à partir de $n = 0$.
En effet : Supposons P_n vraie donc il existe k_n tel que $7^n + 1 = 6k_n$, $k_n \in \mathbb{Z}$.
Alors $7^{n+1} = 7 \times 7^n + 1 = 7(6k_n - 1) + 1 = 42k_n - 6 = 6(7k_n - 1) = 6k_{n+1}$ avec $k_{n+1} = 7k_n - 1 \in \mathbb{Z}$ donc P_{n+1} est vraie aussi.
P_{n+1} est donc toujours vraie lorsque P_n l'est.
P_n est une propriété **héréditaire**.

On ne peut pas conclure par une démonstration par récurrence, car nous n'avons pas montré l'initialisation.
Or P_0 est faux !.
On ne sait donc pas si la propriété est vraie pour d'autres valeurs entires de n autres que 0.

En fait, la propriété est fausse pour toutes les valeurs entières de n ! (facile à montrer en spécialité avec les congruences).

Exercices du livre n° 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20 ; 24 page 53