TS : devoir sur feuille n° 1

Les mathématiques devraient être regardées comme l'alphabet de toute philosophie. (Francis Bacon)

I

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$

b) $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$

II

Résoudre l'inéquation $\dfrac{3x+5}{x+2} \geqslant \dfrac{2x+1}{x-1}$.

III

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ par

$$f(x) = \frac{-2x^2+6x-7}{2x-1}.$$

1. (a) Calculer la dérivée de la fonction f et vérifier que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f'(x) = \frac{-4x^2+4x+8}{(2x-1)^2}.$$

   (b) Étudier le signe de la dérivée et dresser le tableau de variation de f.

2. Établir l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$, représentative de de f, au point d'abscisse 0.

3. Déterminer les abscisses éventuelles des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur 3.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

IV

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}.$$

1. (a) Montrer que $f(x)$ s'écrit sous la forme : $f(x) = x - \dfrac{x}{(x-1)^2}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.
   (b) Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que

$$f'(x) = \frac{x(x-1)\left(x^2-3x+4\right)}{(x-1)^4}.$$

   (a) Étudier le signe de $f'(x)$ à l'aide d'un tableau de signes.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.
   (b) Déterminer l' abscisse du point de la courbe où la tangente est parallèle à la droite Δ.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ.

V

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = 5 - 4u_n \end{cases}.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

VI

Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{u_n+2} \end{cases}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.