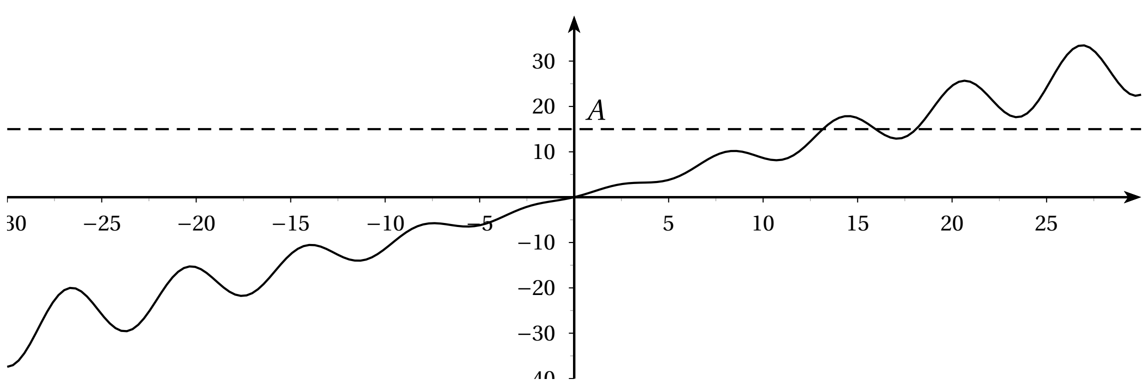
Limites de fonctions, continuité

Table des matières

I Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$

Définition

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ signifie que tout intervalle $[A;+\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.
Traduction : $\forall A > 0, \exists x_0, x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$



Définition équivalente pour $-\infty$.

Définition

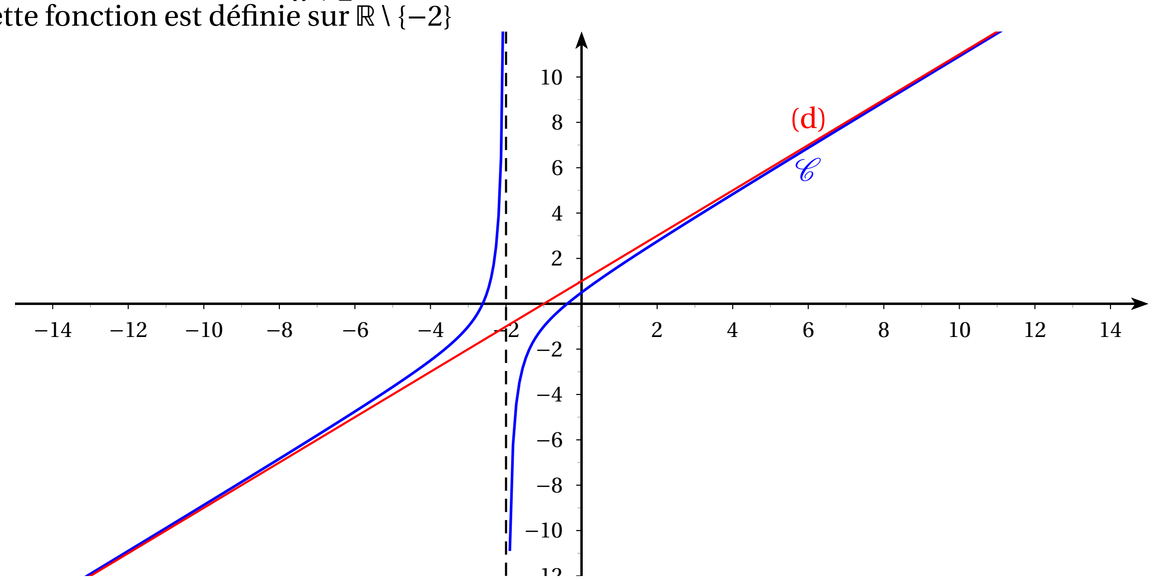
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ signifie que tout intervalle $[-\infty; A[$ contient $f(x)$ pour x tendant vers $-\infty$.
Traduction : $\forall A < 0, \exists x_0, x < x_0 \Rightarrow f(x) < A$

Asymptote oblique :

Définition

Une droite (d) d'équation $y = ax+b$ est asymptote (oblique) à la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.
Définition identique en $-\infty$).

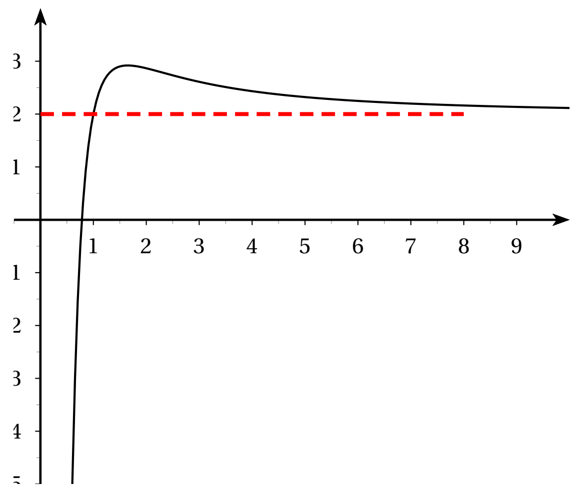
Exemple : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$, avec comme droite (d) d'équation : $y = x+1$.
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$



II Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$:

Définition :

Soit ℓ un réel. f a pour limite ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert centré sur ℓ $]\ell-\alpha\ ;\ \ell+\alpha[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est alors asymptote à $\mathscr{C}_f$.
Traduction mathématique : $\forall \alpha > 0, \exists A > 0, x > A \Rightarrow f(x) \in]\ell-\alpha; \ell+\alpha[$



Exemples : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-a} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(x-a)^p} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x-a}} = 0$

III Limite infinie en un réel

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si f n'est pas définie en a et si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x suffisamment proche de a.
Pour tout $A > 0$, $f(x) \in]A\,;\,+\infty[$ pour x proche de a.
Plus précisément : $\forall A > 0,\ \exists \varepsilon > 0,\ x \in]a-\varepsilon\,;\,a+\varepsilon[\Rightarrow f(x) > A$

Interprétation géométrique : on a alors une asymptote verticale.
C'est le cas de l'exemple précédent : la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe.

IV Limite finie en un réel :

Définition

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ pour x suffisamment proche de a.
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ x \in]a-\alpha\,;\,a+\alpha[\Rightarrow f(x) \in]\ell-\varepsilon\,;\,\ell+\varepsilon[$.

Exemple 1 : la fonction $x \mapsto x^2$ en $a \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$

Exemple 2 : soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.
Sur $]-\infty\,;\,0[$, $f(x) = -1$ et sur $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = 1$.
f n'a donc pas de limite en 0 (mais admet une limite à gauche et une limite à droite).

Exemple : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Cela permet éventuellement de prolonger des fonctions non définies en un point. (voir chapitre sur la continuité)

V Théorème des gendarmes

Théorème

Soient f, g et h trois fonctions et ℓ un réel.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell$ et si, pour x assez grand, on a : $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\ell$.

Démonstration (hors-programme, mais facile !) :

Soit I un intervalle ouvert quelconque contenant ℓ.
$\exists M / x\geq M \Rightarrow f(x)\in I$.
$\exists M' / x\geq M' \Rightarrow h(x)\in I$.
$\exists M'' / x\geq M'' \Rightarrow f(x)\leq g(x)\leq h(x)$.
Soit $M_0=\max(M, M', M'')$. $\forall x\geq M_0$, $f()\in I$.

Applications :

- $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ en appliquant le théorème des gendarmes.
- De même : $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

Théorème de comparaison :

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et si $f(x)\geq g(x)$ pour x assez grand, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Propriété analogue avec $-\infty$.

VI Opérations et limites

Nous avons les mêmes théorèmes que pour les suites.

VII Limite d'un polynôme en $\pm\infty$:

Propriété

En cas de forme indéterminée, on calcule la limite à l'infini d'un polynôme en mettant en facteur le terme de plus haut degré.

Exemple : calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)$.

POur $x\neq 0$, $x^2-x=x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty x^2=+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$.

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)=+\infty}$

VIII Limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$:

Propriété

En cas de forme indéterminée, on calcule la limite à l'infini d'une fraction rationnelle en factorisant au numérateur et au dénominateur les termes de plus haut degré.

Exemple :

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x}{x^4+5}\right)$.

Le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers / $+\infty$ donc on a une forme indéterminée.

Pour $x\neq 0$, $\left(\dfrac{2x^2+3x}{x^4+5}\right)=\dfrac{x^2\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{x^4\left(1+\dfrac{5}{x^4}\right)}=\dfrac{2+\dfrac{3}{x}}{x^2\left(1+\dfrac{5}{x^4}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{5}{x^4}\right)=1$.

Par produit et quotient, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x}{x^4+5}\right)=0}$

IX Limite d'une fonction composée

Définition

Soient deux fonctions f et g, définies sur leurs ensembles de définition $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$.
On suppose que les images de f appartiennent à $\mathscr{D}_g$.
La composée de g et de f, notée $g\circ f$ est définie par :

$$\forall x\in\mathscr{D}_f,\ g\circ f(x)=g(f(x))$$

Exemple : Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.
$g=v\circ u$ avec $u(x)=x^2+x+1$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

Remarque : En général, $f\circ g\neq g\circ f$.

Théorème

Soient u et v deux fonctions définies sur deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $x\in I$, $u(x)\in J$.
a, b et c sont des lettres représentant des réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ et si $\lim\limits_{X\to b}v(X)=c$, alors $\lim\limits_{x\to a}v\circ u(x)=c$

Exemple : soit $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x+9}}$.

$f=v\circ u$ avec $u(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x+9}$ et $v(x)=\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=1$; $\lim\limits_{X\to1}v(X)=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

X Fonctions continues

X.1 Définition de la continuité :

Définition

Soit f est une fonction définie sur un intervalle I et soit a est un réel de I.
f est continue en a signifie que f admet une limite en a égale à $f(a)$.
f est continue sur l'intervalle I signifie que f est continue en chaque point a de I.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $I =]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
La fonction f est continue en 2 car : $f(2) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.
Plus généralement, cette fonction est continue sur I.

X.2 Illustration graphique :

De manière intuitive, on reconnaît graphiquement qu'une fonction est continue lorsque sa courbe peut être tracée sans lever le crayon. (attention, cela ne constitue pas une preuve !)

Exemple : la fonction carré est continue :
En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$; on peut donc tracer la parabole sans lever le crayon.

Existe-t-il des fonctions non continues ? Oui, il suffit de tracer une courbe avec une rupture dans le tracé ; la fonction associée n'est alors pas continue.

X.3 Exemple d'une fonction explicite non continue : la fonction « Partie entière »

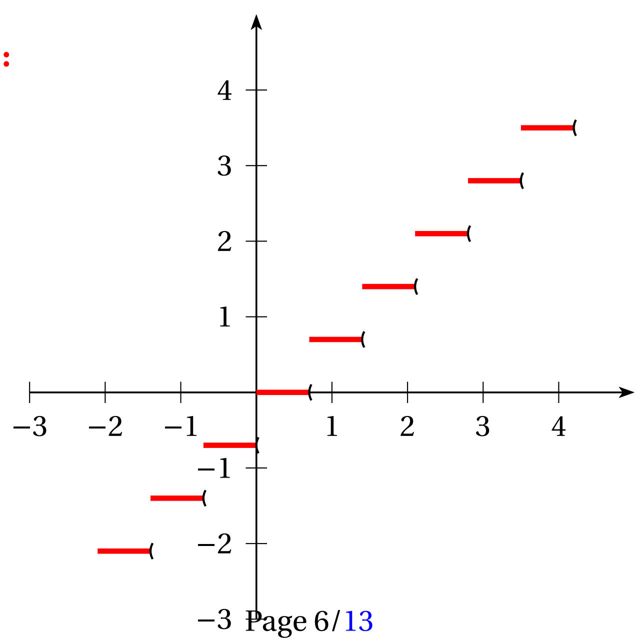
Définition

Soit x un réel. Il existe alors un entier relatif n unique tel que : $n \leq x < n+1$. On définit alors la fonction partie entière, notée E, par : $E(x) = n$.

Exemples : $E(2,3) = 2$; $E(3) = 3$; $E(-4,12) = -5$ (**attention aux nombres négatifs**).

Remarque : Cette fonction est constante sur chaque intervalle de la forme $[n\,;n+1[$.

Représentation graphique :



Sur $[n\ ;\ n+1[$, $E(x)=x$.

$\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} E(x)=n$ puisque $E(x)=n$ sur $[n\ ;\ n+1[$

$\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} E(x)=n-1$ puisque $E(x)=n-1$ sur $[n-1\ ;\ n[$

$E(n)=n$.

On n'a donc pas $\lim\limits_{x\to n} E(x)=E(n)$: E n'est pas continue en n pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

En fait, E est continue à droite, mais pas à gauche.

Exemple de fonction discontinue partout (hors-programme !)

La fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=0 \text{ si } x\in\mathbb{Q} \\ f((x)=1 \text{ si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ est discontinue en tout réel a de $\mathbb{R}$.

Cela vient de la structure des réels. Pour chaque nombre rationnel (pouvant d'écrire comme quotient d'entiers), on peut toujours trouver un irrationnel aussi proche que l'on veut de ce rationnel et on peut approcher aussi près que l'on veut un irrationnel par un rationnel

X.4 Différents types de discontinuité

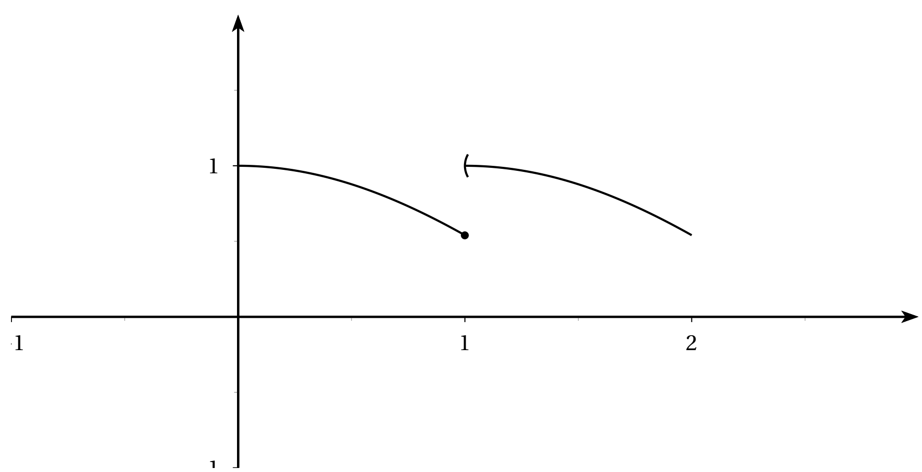
Y a-t-il différents types de discontinuité ? Oui !

Une fonction f est continue en a si, et seulement si, elle a une limite à gauche et une limite à droite en a et que ces deux limites sont égales à $f(a)$.

Elle peut donc être discontinue en a pour plusieurs raisons.

- **Première raison possible :** f admet une limite à gauche et à droite en a, mais ces deux limites ne sont pas égales.

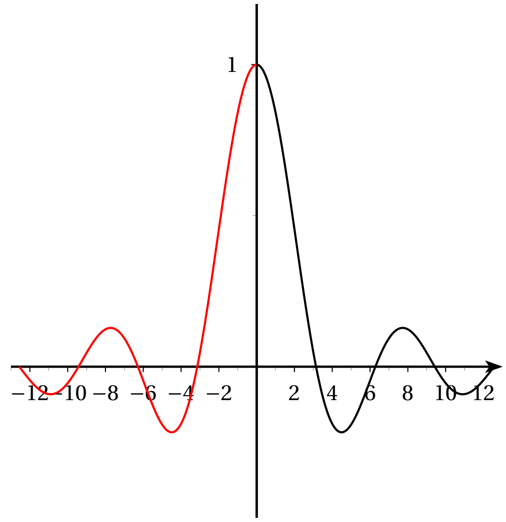
  Exemple : Soit f définie par : $f(x)=\begin{cases}\cos(x) \text{ sur } [0\ ;\ 1] \\ \cos(x-1) \text{ sur }]1\ ;\ 2]\end{cases}$.



- **Deuxième raison possible :**

f admet une limite commune à gauche et à droite en a, mais f n'est pas définie en a ou admet une autre valeur que la limite commune. C'est le cas par exemple de la fonction sinus amorti, très importante en physique, définie par :

$$f\ :\ x \mapsto \frac{\sin x}{x} \text{ pour tout } x \neq 0$$



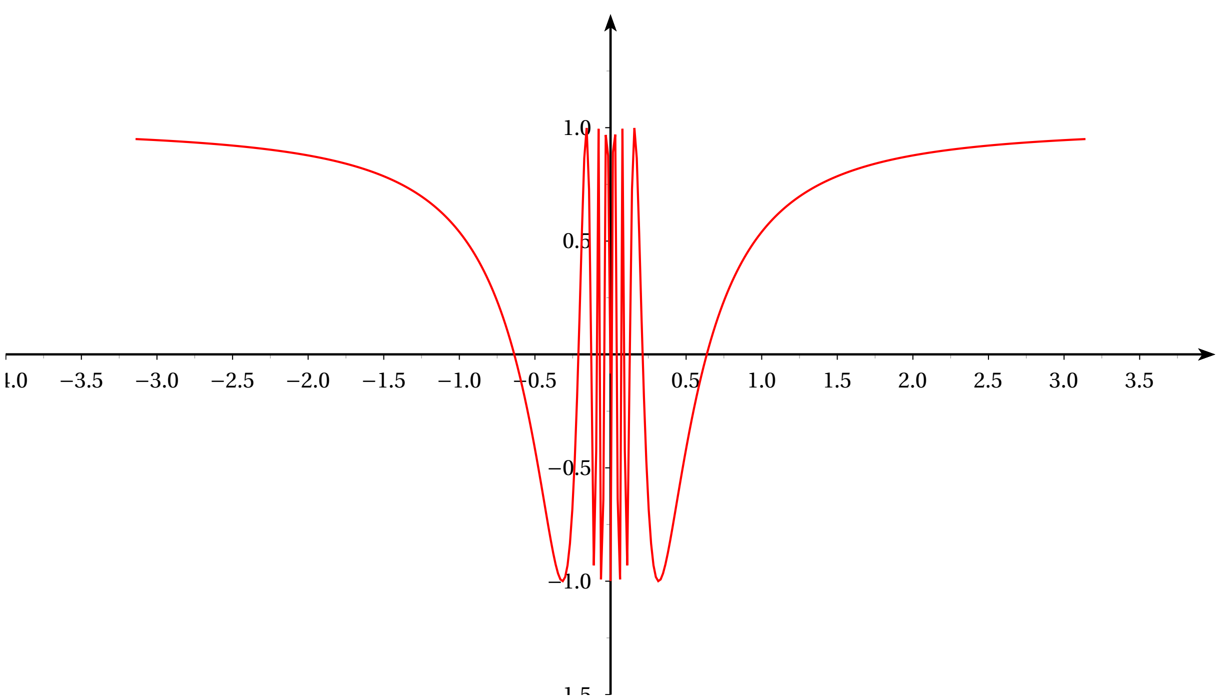
Bien que cette fonction ne soit pas définie en 0, cela « ne se voit pas » graphiquement.
En effet, pour $x \neq 0$, on peut écrire $\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$, qui tend vers $\sin'(0)$ quand x tend vers 0, c'est-à-dire vers $\cos(0) = 1$.
Par conséquent : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
On peut alors **prolonger f par continuité** en définissant une fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ pour } x \neq 0 \\ 1 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi une fonction g **définie et continue** sur $\mathbb{R}$.

- **Troisième raison possible**, et les choses deviennent compliquées : f n'a pas de limite à droite ou à gauche en a. Il faut bien avouer que dans la pratique, presque toutes les fonctions ont une limite à gauche et à droite. Mais il faut avoir vu ces contre-exemples une fois dans sa vie, pour bien comprendre la théorie et pour être sûr de donner des définitions cohérentes, comme celui de la fonction f définie par

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$



XI Continuité des fonctions usuelles :

Théorème

Les fonctions polynômes, la fonction sinus, la fonction cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.
La somme, le produit, le quotient et la composée de deux fonctions continues est une fonction continue sur leur ensemble de définition.

Démonstration : Cela vient des propriétés sur les calculs de limites (voir chapitre sur les limites)

Exercice : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xsix \leq 0$, $f(x) = x^2$ si $0 < x < 1$, $f(x) = m$ si $x \geq 1$.

1. $m = 2$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

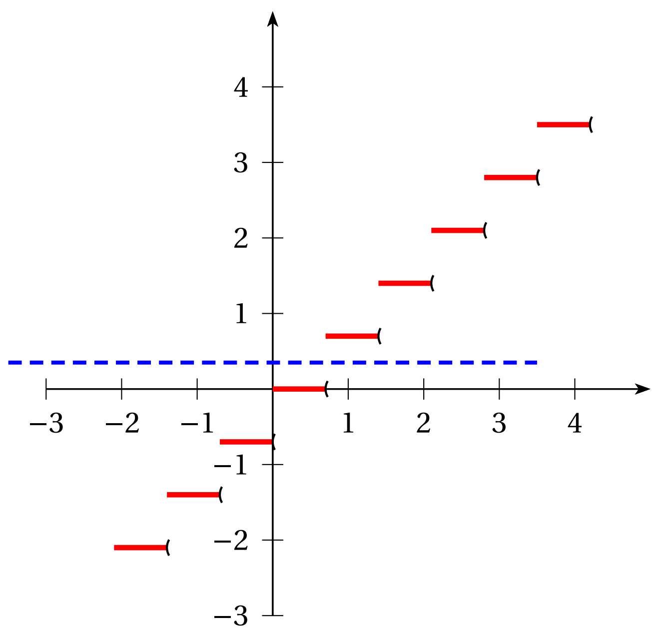
XII Le théorème des valeurs intermédiaires :

XII.1 Théorème

Approche :

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 3]$. Soit k un nombre compris entre $f(-3)$ et $f(3)$.
Existe-t-il un nombre x tel que $f(x) = k$?

- **Cas d'une fonction non continue.**
  Par exemple, reprenons le cas de la fonction partie entière, définie sur $\mathbb{R}$.
  Considérons l'équation $f(x) = 0,5$.
  Il est clair graphiquement que l'équation n'a pas de solution.



- **Cas d'une fonction continue.**
  Comme la courbe se trace sans lever le crayon, il semble intuitivement que l'équation $f(x)=k$ ait au moins une solution

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

f est une fonction **continue** définie sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.

Remarque : c'est un **théorème d'existence** ; il ne donne pas la valeur d'un solution. D'ailleurs, la plupart du temps, on se sert de ce théorème pour montrer l'existence d'une solution qu'on ne sait pas trouver de façon explicite.

Interprétation graphique :

Si $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de f continue sur $[a;b]$, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite d'équation $y=k$ coupe au moins une fois la courbe $(\mathscr{C})$ en un point d'abscisse c comprise entre a et b.

Interprétation en terme d'équation :
f est une fonction continue sur un intervalle I comprenant a et b. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **au moins** une solution c comprise entre a et b.

Exercice : Soit (E) l'équation : $\cos(2x)=2\sin x-2$.
Démontrer que (E) admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

Solution : L'équation s'écrit : $f(x)=-2$ avec $f(x)=\cos(2x)-2\sin(x)$. f est continue. -2 est compris entre $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Autres exercices :

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. a et b sont des réels de I tels que $f(a)f(b)<0$. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution comprise entre a et b.
2. Démontrer que l'équation $x^3+4x^2+4x+2=0$ admet au moins une solution comprise entre -3 et -1.
   On pose $f(x)=x^3+4x^2+4x+2$; $f(-3)=-1<0$; $f(-1)=1>0$; f est continue, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3\,;\,-1]$.
   Pour savoir le nombre exact de solutions de l'équation $f(x)=0$, il faut étudier les variations de f.
3. Montrer qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.
4. Un randonneur parcourt 10 km en deux heures exactement. Montrer qu'il y a un intervalle de temps de durée une heure exactement durant lequel il parcourt exactement 5 km.
   On note $d(t)$ le temps parcouru au bout de t heures $(0\leqslant t\leqslant 2)$ et on considère la fonction $u\ :\ t\mapsto d(t+1)-d(t)$.

   Solution :
   $u(0)=d(1)$ et $u(1)=d(2)-d(1)$.
   - Si $u(1)=5$, l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ convient.
   - Si $u(1)<5$, alors $u(0)<5$ et $u(1)>5$; comme u est continue, l'équation $u(t)=5$ a une solution.
   - Si $u(1)>5$, alors $u(0)>5$ et $u(1)<5$; comme u est continue, l'équation $u(t)=5$ a une solution.

5. Montrer qu'à un instant donné, il y a deux points diamétralement opposés de l'équateur en lesquels on a exactement la même température.

Solution :
Déjà on peut se mettre d'accord sur le fait que si vous vous déplacez pas à pas sur la ligne de l'équateur, la température évoluera de faÁon continue : peu de chance d'avoir un "saut " brutal de température.
Voilà dejà la continuité qui fait son apparition, c'est un bon début. . .

Considérons maintenant la fonction T qui, à un point de l'équateur, associe la différence de température entre ce point et le point qui lui est diamétralement opposé. Nous voilà avec une fonction qui sera continue d'après la remarque précédente.
Prenons un point A de l'équateur au hasard. De deux choses l'une :

- Soit au point B diamétralement opposé à A, la température est la même qu'en A et dans ce cas notre point A est un point qui répond au problème posé.
- Soit la température y est différente. Supposons la inférieure par exemple. Dans ce cas T (A) a un signe strictement positif.
  PlaÁons nous en B : T(B) = - T(A) donc T(B) est négatif strictement.

  Appliquons notre théorème des valeurs intermédiaires : il y a obligatoirement quelque part entre A et B un point M de l'équateur o˘ on aura $T(M) = 0$. Mais cela signifie que en M et au point qui lui est diamétralement opposé les températures sont identiques.
  Maintenant si vous supposez la température en B supérieure à celle de A, le raisonnement s'adapte sans problème.

XII.2 Cas des fonctions continues strictement monotones :

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique.

Démonstration :
L'existence d'une solution vient du théorème des valeurs intermédiaires.
L'unicité vient de la stricte monotonie.

Remarque : Tableaux de variations :
Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

XII.3 Bijection

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble F à valeurs dans G.
On dit que f est bijective de F sur G ou que f est une bijection de f sur G si tout élément de F a une image (unique) dans G et si tout élément de G a un antécédent unique dans F.
(en anglais : a one-to-one function).
On peut alors définir une fonction réciproque de f, notée f^{-1}, de G sur F.

Théorème

Soit une fonction continue stristement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur $f(I)$.

Exemple : Soit f la fonction tan définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
Elle est continue, strictement croissante. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$.
C'est donc une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc définir la fonction réciproque de tan, qui est appelée fonction arctan (arctangente).

arctan : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ x \mapsto \arctan(x) \end{array}$

$y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \arctan(y)$

XII.4 Approximation des solutions d'une équation du type $f(x) = k$

- méthode du balayage
- dichotomie : on coupe l'intervalle en deux à chaque étape.
- utilisation de la fonction Solve de la calculatrice

XIII Suites définies par récurrence

Théorème

Soit (u_n) une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.

Démonstration :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.
- Comme f est continue, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.
- La limite d'une suite est unique, donc $\ell = f(\ell)$.