Fonctions logarithmes népérien et décimal

Table des matières

I Définition

I.1 Définitions

Rappel :

Tout nombre x de $\mathbb{R}$ a une unique image par la fonction exp (comme pour toute fonction).
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel y de $]0;+\infty[$, il existe un unique réel x tel que $e^x = y$. (voir interprétation graphique).

x	$-\infty$	x	$+\infty$
e^x	$-\infty$	y	$+\infty$

Chaque réel de $\mathbb{R}$ a une image unique dans $]0\ ;\ +\infty[$ et réciproquement, chaque réel de $]0\ ;\ +\infty[$ a un antécédent unique par cette fonction exponentielle.

Définition

On dit que la fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
Si $e^x = y$, on dit que x est le logarithme népérien de y.
La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui, à tout réel $x > 0$, associe le nombre noté $\ln(x)$ ou $\ln x$ dont l'exponentielle vaut x.

Conséquences :

a) Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

b) Pour tout réel $x > 0$ et tout réel y, $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$.

c) Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.

Démonstration :
a) et b) se déduisent directement de la définition.
Pour c) : Pour tout réel x, on pose $y = \ln(e^x)$; alors d'après a), $y = e^x$ donc $x = y$.

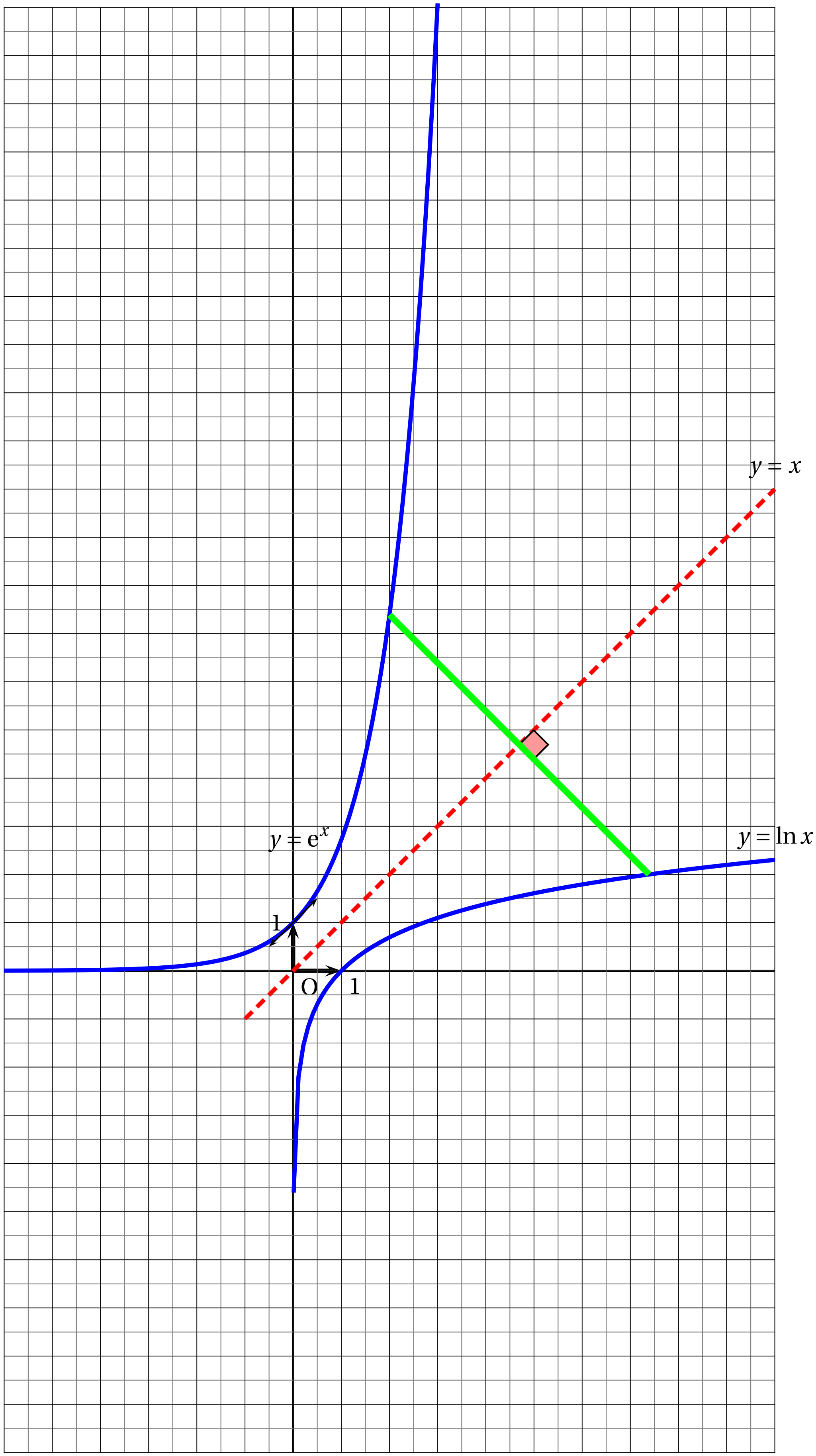
Autres conséquences :

- $\ln 1 = 0$. En effet, $e^0 = 1$ et d'après (1), cela équivaut à $\ln 1 = 0$.
- $\ln e = 1$. En effet, $e^1 = e$ et on applique (1).
- Pour tout réel λ, l'équation $\ln x = \lambda$ a pour unique solution $x = e^\lambda$ (d'après (1)).

Propriété

Dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration :
$M'(x; y) \in \mathscr{C}' \Leftrightarrow y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y \Leftrightarrow M(y; x) \in \mathscr{C}$. M et M' sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, donc les deux courbes également.


$y = x$
$y = e^x$
$y = \ln x$
1
O
1

I.2 Sens de variation

Propriété

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration : a et b sont deux réels tels que $0<a<b$. Cela équivaut à : $e^{\ln a}<e^{\ln b} \Leftrightarrow \ln a<\ln b$ puisque la fonction exponentielle est croissante.

Conséquences :
Soient a et b deux réels de $]0;+\infty[$.

- $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$.
- $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$.
- $\ln a<0 \Leftrightarrow a<1$.
- $\ln a>0 \Leftrightarrow a>1$.

Exercices d'application :

a) Résoudre : $\ln x=-5$
$\ln x=-5 \Leftrightarrow \boxed{x=e^{-5}}$

b) Résoudre l'équation $\ln(3x+2)=7$
On commence par résoudre l'inéquation $3x+2>0$ soit $x>-\dfrac{2}{3}$.
On obtient alors : $\boxed{x=\dfrac{e^7-2}{3}}$. Il reste à vérifier si la solution appartient à l'intervalle de définition.

c) Résoudre l'inéquation $\ln(2+x)\geqslant 100$ Ensemble de définition : $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$.
Pour $x>-2$, $\ln(2+x)\geqslant 100 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(2+x)}\geqslant \mathrm{e}^{100} \Leftrightarrow 2+x\geqslant \mathrm{e}^{100}$ (car exp est croissante).
On en déduit : $x\geqslant \mathrm{e}^{100}-2>-2$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\{\mathrm{e}^{100}-2\}}$

d) Résoudre l'équation $\ln(x^2-9)=\ln x$
On doit avoir : $x^2-9>0$ et $x>0$ et $x^2-9=x$
$x^2-9>0 \Leftrightarrow x^2>9 \Leftrightarrow x<-3$ ou $x>3$.
Finalement, l'ensemble de définition est $\mathscr{D}=]3\,;\,=\infty[$.
Pour $x\in\mathscr{D}$, $\ln(x^2-9)=x\ln \Leftrightarrow x^2-9-x=0 \Leftrightarrow x^2-x-9=0$.
$\Delta=37>0$; on trouve $x_1=\dfrac{1-\sqrt{37}}{2}\notin\mathscr{D}$; $x_2=\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}>3$ donc $x_2\in\mathscr{D}$.
$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\right\}}$

II Propriétés algébriques

II.1 Relation fonctionnelle

Théorème

Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$: $\ln ab=\ln a+\ln b$

Démonstration :
a et b sont deux réels strictement positifs.

On pose $A = \ln ab$ et $B = \ln a + \ln b$.
Alors : $e^A = ab$; $e^B = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab = A$.

II.2 Logarithme d'un quotient

Propriété

Pour $a > 0$, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$.

Démonstration :
$a \times \dfrac{1}{a} = 1$ d'o˘ $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln a + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = 0$ d'o˘ : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$.

Propriété

Pour tous réels a et b de $]0 ; +\infty[$, $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Démonstration :
$\ln \dfrac{a}{b} = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \dfrac{1}{b} = \ln a - \ln b$.

II.3 Logarithme d'un produit de nombre positifs

Propriété

Pour tous réels strictement positifs a_1, a_2, ..., a_n, $\ln(a_1 a_2 \dots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots \ln a_n$.
Autre écriture (symbolique) : $\ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln a_i$

Démonstration : par récurrence sur n (facile, laissée au lecteur).

II.4 Logarithme d'une puissance

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif n, $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$.

Démonstration : Il faut distinguer les cas $n > 0$, $n = 0$ et $n < 0$.

- $n > 0$: on applique la propriété précédente, avec n termes égaux à a.
- $n = 0$: immédiat
- $n < 0$: $\ln\left(a^n\right) = \ln\left(\dfrac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln\left(a^{-n}\right) = -(-n)\ln a = n \ln a$.

II.5 Logarithme d'une racine carrée

Propriété

Pour tout réel $a > 0$: $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Démonstration : $a > 0$; $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ donc $\ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = \ln a$, c'est-à-dire $2\ln\sqrt{a} = \ln a$ d'o˘ l'égalité annoncée.

Remarques : on a $\ln 2 \approx 0,69$ et $\ln 10 \approx 2,3$.
On en déduit : $\ln\left(10^9\right) = 9\ln 10 \approx 20,7$.

Exercices : Résolution d'équations ou inéquations faisant intervenir le logarithme.

1. Résoudre l'équation : $\ln(x+1) + \ln(2x+3) = \ln(x+5)$
2. Résoudre l'inéquation : $\ln(x^2-5) \leqslant \ln(x+3)$

III Etude de la fonction logarithme

III.1 Limites en 0 et en $+\infty$

Propriétés

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Démonstration :

- Soit A un nombre réel quelconque. La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$.
  $\forall x > e^A$, $\ln x > A$. Ainsi l'intervalle $[A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln x$ pour x assez grand.
  Cela démontre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
- Pour $x > 0$, on pose $X = \dfrac{1}{x}$. Alors : $\ln x = \ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = -\ln X$
  $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{X\to+\infty} (-\ln X) = -\infty$ en appliquant le théorème sur la limite d'une fonction composée.

III.2 Continuité et dérivabilité de la fonction logarithme

Propriété

La fonction ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.
De plus, pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration :
On admet la continuité.

Dérivabilité :
Soit a un nombre positif et soit h un nombre tel que $a+h > 0$.

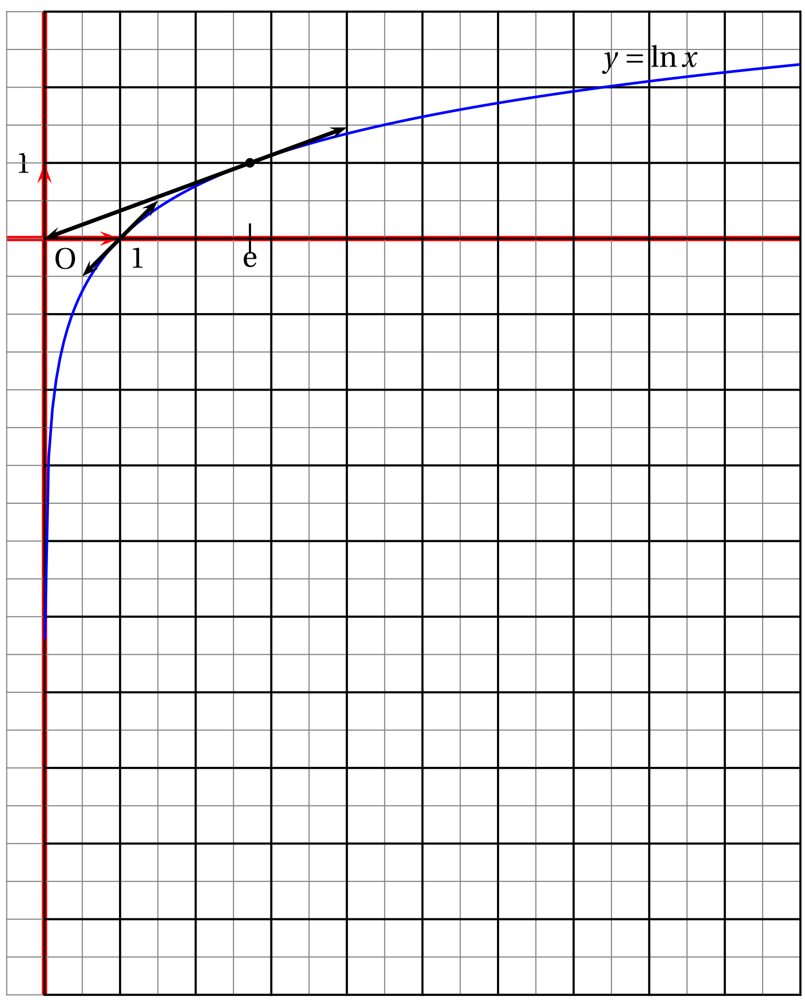
On pose : $b=\ln a$ et $k=\ln(a+h)$, donc $a=e^b$ et $a+h=e^k$.
$\dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h}=\dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{(a+h)-a}=\dfrac{k-b}{e^k-e^b}$.
La fonction ln est continue, donc $\lim\limits_{h\to 0}\ln(a+h)=\ln a$, donc : $\lim\limits_{h\to 0}k=b$.

La fonction exponentielle est dérivable en b, de dérivée e^b ; autrement dit : $\lim\limits_{k\to b}\dfrac{e^k-e^b}{k-b}=e^b$, donc
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h}=\dfrac{1}{e^b}=\dfrac{1}{a}$.

III.3 Tableau de variation et représentation graphique

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$	$+$
$\ln(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

Courbe : l'axe des ordonnées est une asymptote verticale.
La courbe admet deux tangentes remarquables, en $x=1$ et $x=e$. La courbe est ci-dessous.



Remarque : la tangente à la courbe au point de coordonnées $(\mathrm{e}\,;\,1)$ passe par l'origine.
Cette fonction croÓt lentement : $\ln\left(10^9\right) = 9\ln 10 \approx 20,72$

III.4 Croissances comparées

Théorème

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$

Démonstration

1. On pose $X = \ln x$ (donc $x = \mathrm{e}^X$).
   Quand x tend vers $+\infty$, X tend aussi vers $+\infty$.
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{X}{\mathrm{e}^x}\right)$.
   D'après les croissances comparées, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^X}{X}\right) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{X}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln x = \lim_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X = 0$ d'après les formules de croissances comparées avec la fonction exponentielle.

Théorème

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^n}\right) = 0$ piour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^n\ln x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Démonstration

1. Avec $X = \ln x$, on a $\dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{X}{\left(\mathrm{e}^X\right)^n} = \dfrac{X}{\mathrm{e}^{nX}} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{nX}{\mathrm{e}^{nX}}$.
   On pose alors $Y = nX$.
   On a successivement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^n}\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\times\frac{nX}{\mathrm{e}^{nX}}\right) = \frac{1}{n}\lim_{Y\to+\infty}\left(\frac{Y}{\mathrm{e}^Y}\right) = 0$ (car $\dfrac{1}{n}$ est une constante).
2. De même : $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^n\ln x = \lim_{X\to+\infty}\left(X\mathrm{e}^{nX}\right) = \frac{1}{n}\times\lim_{Y\to+\infty} Y\mathrm{e}^Y = 0$

IV Logarithme d'une fonction

Soit u une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout x de I, $u(x) > 0$. $\ln u$ désigne la composée $\ln\circ u$, définie sur I.

Propriété

Si u est une fonction définie, strictement positive et dérivable sur I, la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstration :
On applique le théorème de dérivation d'une fonction composée :

$\forall x \in I$, $(\ln \circ u)'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple : $f(x) = \ln(x^2 + x + 7)$.

Remarque : Si u est négative et dérivable sur I, $f = \ln \circ (-u)$ est dérivable sur I et $f' = \dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u}$.

V Logarithme décimal (hors-programme)

Définition

La fonction logarithme décimale est la fonction notée log, définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Remarque : $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$

Propriété

Pour a et b strictement positifs, $\log ab = \log a + \log b$.

Démonstration : c'est évident, puisque la fonction logarithme décimale est égale à la fonction logarithme népérien, à un facteur près.

Remarque : toutes les propriétés algébriques de la fonction ln sont donc vérifiées par la fonction log.

Remarque : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\log\left(10^n\right) = n$, d'où l'utilisation de cette fonction en sciences physiques.

Application : déterminer le nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un nombre.
Exemple : trouver le nombre de chiffres du nombre $N = 2^{12345}$.
On a : $\log(N) = \log\left(2^{12345}\right) = 12\,345 \log 2$.
On trouve, à la calculatrice : $E(12\,345 \log 2) = 3\,716$.
Donc : $3\,716 < \log N < 3\,717 \Rightarrow 10^{3716} < N < 10^{3717}$.
N comprend donc 3 717 chiffres.