TS : correction du devoir sur feuille n° 1

I

a) Soit l'équation $3x^2-5x-1=0$

Le discriminant est $\Delta=37>0$. L'équation a deux solutions :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{5-\sqrt{37}}{6}\ ;\ \frac{5+\sqrt{37}}{6}\right\}}$$

b) Soit l'équation $x^4+4x^2-21=0$.

On pose $X=x^2$ donc $x^4+4x^2-21=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X^2+4X-21=0 \end{cases}$

Le discriminant de cette équation d'inconnue X est $\Delta=100>0$.

Elle a deux solutions réelles : $X_1=\dfrac{-4-10}{2}=-7$ et $X_2=\dfrac{-4+10}{2}=3$.

Or $X=x^2$, donc on résout les équations $x^2=X_1$ et $x^2=X_2$.

$x^2=X_1=-7$ n'as pas de solution ; $x^2=X_2=3$ a deux solutions, $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\right\}}.$$

II

Soit l'inéquation $\dfrac{3x+5}{x+2}\geqslant\dfrac{2x+1}{x-1}$.

1 et -2 sont des valeurs **interdites** (valeurs qui annulent les dénominateurs). L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\ ;\ 1\}$.

On suppose que $x\in\mathcal{D}$.

Alors : $\dfrac{3x+5}{x+2}\geqslant\dfrac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{3x+5}{x+2}-\dfrac{2x+1}{x-1}\geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(3x+5)(x-1)-(2x+1)(x+2)}{(x+2)(x-1)}\geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(3x^2-3x+5x-5\right)-\left(2x^2-x+2x+2\right)}{(x+2)(x-1)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x-7}{(x+2)(x-1)}$.

Le numérateur est un trinôme du second degré ; pour trouver son signe, on cherche ses racines.

$\Delta=37>0$; il y a deux racines $x_1=\dfrac{3-\sqrt{37}}{2}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$.

Le dénominateur s'annule pour $x_3=-2$ ou $x_4=1$.

On renseigne alors un tableau de signes, sans oublier les double-barres sous les valeurs interdites :

x	$-\infty$		-2		$\frac{3-\sqrt{37}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{37}}{2}$		$+\infty$
x^2-3x-7		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-1)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2-3x-7}{(x+2)(x-1)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

On cherche dans le tableau les valeurs de x pour lesquelles le quotient est positif. L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathcal{S}=]-\infty\ ;\ 2[\cup\left[\frac{3-\sqrt{37}}{2}\ ;\ 1\right[\cup\left[\frac{3-\sqrt{37}}{2}\ ;\ +\infty\right[}$$

III

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ par

$$f(x)=\frac{-2x^2+6x-7}{2x-1}.$$

1. (a) $f=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=-2x^2+6x-7$ et $v(x)=2x-1$.

$f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x)=-4x+6$ et $v'(x)=2$.

Alors :

$f'(x)=\dfrac{(-4x+6)(x-1)-2\left(-2x^2+6x-7\right)}{(2x-1)^2}$

$=\dfrac{(-4x^2+4x+8)}{(2x-1)^2}=\boxed{-4\dfrac{(x^2-x-2)}{(2x-1)^2}}$. (en factorisant par -4)

x^2-x-2 a une racine évidente, -1, donc se factorise par $(x+1)$:

$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.

On en déduit que $\boxed{f'(x)=\dfrac{-4(x-2)(x+1)}{(2x-1)^2}}$.

(b) On renseigne un tableau de signes ; le numérateur est un trinôme du second degré dont on connaît les racines (il est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines).

Le dénominateur est le carré d'un réel, donc toujours positif ; $f"(x)$ est donc du signe du numérateur.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	5	↗	$\Vert$	↗	-1	↘	

2. L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.

   Pour $a = 0$: $y = f'(0)x + f(0)$. Or $f(0) = 7$ et $f'(0) = 8$.

   L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 est : $\boxed{y = 8x+7}$.

3. Il faut résoudre l'équation $f'(x) = 3$.

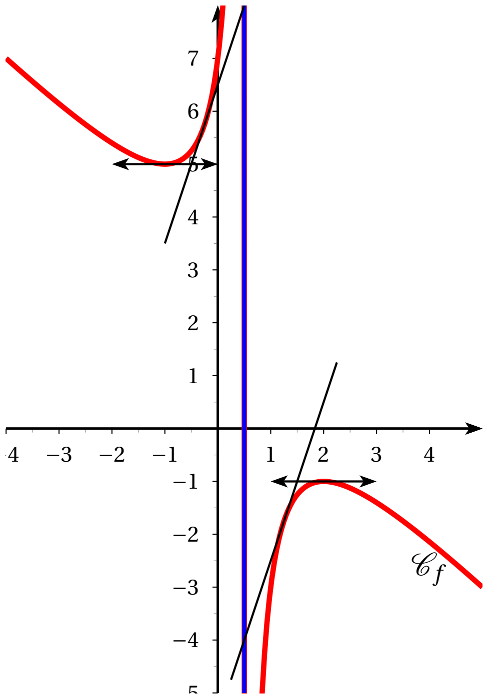
   $f'(x) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{-4x^2+4x+8}{(2x-1)^2} = 3 \Leftrightarrow -4x^2+4x+8 = 3(2x-1)^2 \Leftrightarrow -4x^2+4x+8 = 12x^2-12x+3$
   $\Leftrightarrow -16x^2+16x+5 = 0$.

   $\Delta = 16^2 + 4\times 16\times 5 = 16(16+20) = 16\times 36 = 4^2\times 6^2 = (4\times 6)^2 = 24^2 > 0$.

   Il y a deux solutions qui sont $\dfrac{-16-24}{-32} = \dfrac{5}{4}$ et $\dfrac{-16+24}{-32} = -\dfrac{1}{4}$.
   Ca courbe a deux tangentes de coefficient directeur égal à 3 aux points d'abscisses $-\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{5}{4}$

4. **Courbe** :

   Penser à tracer les tangentes horizontales.



IV

Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}.$$

1. (a) Pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) = \dfrac{x\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^2}$
   $= \dfrac{x\left(x^2-2x+1-1\right)}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-1)^2}{(x-1)^2} - \dfrac{x}{(x-1)^2}$
   $= x - \dfrac{x}{(x-1)^2}$, donc, pour tout $x \in \mathscr{D}$,

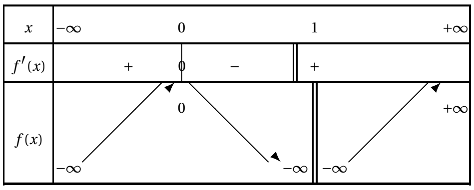
   $$\boxed{f(x) = x - \frac{x}{(x-1)^2}}.$$

   (b) On étudie le signe de la différence $f(x) - x$.
   D'après la question A., $f(x) - x = -\dfrac{x}{(x-1)^2}$ qui est du signe opposé à celui de x, donc positif pour x négatif et négatif pour x positif.
   On en déduit que $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ pour $x \in]- \,;\, 0]$ et en dessous sur $[0\,;\,1[$ et sur $]1\,;\,\infty[$.

2. f est dérivable sur $\mathscr{D}$ comme quotient de onctions dérivables.
   $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3-2x^2$ et $v(x) = (x-1)^2$
   $= x^2-2x+1$.
   Alors $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 3x^2-4x$ et $v'(x) = 2x-2 = 2(x-1)$.
   Pour tout $x \in \mathscr{D}$:
   $f'(x) = \dfrac{\left(3x^2-4x\right)(x-1)^2 - 2(x-1)\left(x^3-2x^2\right)}{(x-1)^4} = \dfrac{(x-1)\left[\left(3x^2-4x\right)(x-1) - 2\left(x^3-2x^2\right)\right]}{(x-1)^4} = \dfrac{(x-1)\left[x^3-3x^2+4x\right]}{(x-1)^4} = \dfrac{x(x-1)\left(x^2-3x+4\right)}{(x-1)^4}$

   (a) Le dénominateur est positif donc $f'(x)$ est du signe du numérateur.
   x^2-3x+4 a pour discriminant $\Delta = -7 < 0$ donc x^2-3x+4 est du signe du coefficient de x^2, 1, donc positif.
   On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $x(x-1)$ qui s'annule en 0 et en 1 et qui est positif à l'extérieur de l'intervalle formé par ces nombres.

(b) Tableau de variation :

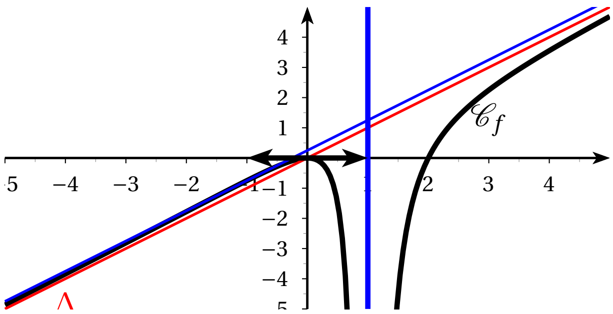


Remarque : l'étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition se fera dans un prochain chapitre.

3. (a) Intersection avec l'axe (Ox) : on résout l'équation $f(x) = 0$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) = 0$ qui a pour solutions 0 et 2. $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en $\boxed{x = 0}$ et $\boxed{x = 2}$.
Intersection avec l'axe (Oy) : on calcule $f(0) = 0$. $\mathscr{C}$ coupe (Oy) en O.

(b) Δ a pour coefficient directeur 1, donc on résout l'équation $f'(x) = 1$.
Pour $x \neq 1$, $f'(x) = 1$
$\Leftrightarrow \dfrac{x(x-1)\left(x^2-3x+4\right)}{(x-1)^4} = 1$
$\Leftrightarrow x(x-1)\left(x^2-3x+4\right) = (x-1)^4$
$\Leftrightarrow (x-1)\left[x\left(x^2-3x+4\right) - (x-1)^3\right] = 0$
$x^3 - 3x^2 + 4x - \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -1}$.
$\mathscr{C}$ a une tangente parallèle à Δ en $x = -1$.

4. Tracés :



V

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = 5 - 4u_n \end{cases}.$$

Soit P_n la proposition :« $u_n = (-4)^{n+1} + 1$ ».
Effectuons une démonstration par récurrence.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, $(-4)^{0+1} + 1 = (-4)^1 + 1 = -4 + 1 = -3 = u_0$, donc la propriété es vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, donc $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.
Alors : $u_{n+1} = 5 - 4u_n = 5 - 4 \times \left((-4)^{n+1} + 1\right) + 1 = 5 + (-4)^{n+2} - 4 = (-4)^{n+2} + 1$.
La propriété est vraie au rang $n+1$, donzelle est héréditaire.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie our tout n, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

VI

Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
Montrons d'abord par récurrence que, pour tout n, $u_n \geqslant 0$.

- **Initialisation** :$u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc c'est vrai pour $n = 0$.
- **Hérédité** : on suppose $u_n > 0$ pour un entier n.
Alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} > 0$ donc c'est vrai au rang $n+1$

On en déduit que $u_n > 0$ pour tout n.

Montrons maintenant par récurrence que, pour tout n, $u_n < 1$.

- **Initialisation** : $u_0 = \dfrac{1}{2} < 1$ donc c'est vrai pour $n = 0$.
- **Hérédité** : on suppose $u_n < 1$ pour un entier n quelconque.
$u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} - 1 = \dfrac{u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \dfrac{-1}{u_n + 2} < 0$
puisque $u_n > 0$. on en déduit que $u_{n+1} - 1 < 0$ donc $u_{n+1} < 1$.
La propriété est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.
On a donc montré que, pour tout n, $\boxed{0 < u_n < 1}$.