# TS : contrôle

## I

Déterminer la limite des suites $(u_n)$ suivantes :

a) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n+1}$ pour tout $n$ entier naturel.

b) $u_n = \dfrac{n^3-1}{3n^2+5n^4}$ pour tout $n$ entier naturel non nul.

c) $u_n = 5^n - 2^n$ pour tout $n$ entier naturel.

d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ pour tout $n$ entier naturel.

e) $u_n = \dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$ pour tout $n$ entier naturel.

## II

Une suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = u_n + 3n^2 - 3n + 1$.

1. Montrer que $u_1 = 1$.
2. Calculer $u_3$, $u_4$ et $u_5$.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n-1)^3 + 1$.
   On pourra utiliser les identités remarquables
   - $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
   - $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

## III

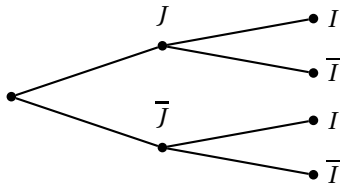
Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+3u_n} \end{cases}$.

1. (a) Calculer $u_1$ et $u_2$.
   (b) La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_n$ n'est pas nul.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.
   (a) Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ puis déduire $u_n$ en fonction de $n$.
   (c) Vers quel nombre tend la suite $(u_n)$ ?

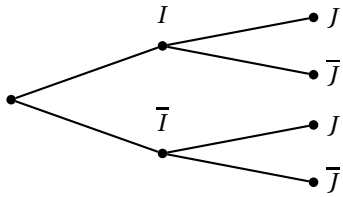
## IV Inversion d'un arbre de probabilités

Une société effectue auprès de 10 000 personnes une étude de marché concernant un nouveau produit. Dans cet échantillon, 40 % sont des jeunes (moins de 20 ans) et 20 % de ceux-ci se déclarent intéressés par le produit.
En revanche, 10 % seulement des personnes de plus de 20 ans se déclarent intéressées par le produit.
On choisit une personne au hasard dans l'échantillon. On note $J$ l'événement « La personne est jeune » et $I$ « La personne est intéressée ».

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :




2. (a) Calculer $p(I \cap J)$, $p(I \cap \overline{J})$, $p(\overline{I} \cap J)$ et $p(\overline{I} \cap \overline{J})$.
   (b) Calculer $p(I)$.
3. (a) caculer la probabilité que la personne ait moins de 20 ans sachant que la personne est intéressée par le produit.
   (b) Compléter l'arbre ci-dessous.




## V

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussette auprès de trois fournisseurs $\mathscr{F}_1$ , $\mathscr{F}_2$ , $\mathscr{F}_3$. Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique. La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ , le tiers par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathscr{F}_3$ . Une étude statistique a montré que :

- 5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussette ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise. On considère les évènements $F_1$ , $F_2$ , $F_3$ et D suivants :
   - $F_1$ : La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ ;
   - $F_2$ : La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ ;
   - $F_3$ : La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$ ;
   - D : La paire de chaussettes prélevée présente un défaut .

   (a) Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents. Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cette expérience.
   (b) Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $F_1$ et présente un défaut.
   (c) Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.
   (d) En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.
   (e) Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $F_3$ , quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?