TS : devoir nº 1

Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. (Francis Bacon, philosophe)

I

Résoudre l"équation : $2x^4 - 11x^2 + 15 = 0$

II

Résoudre soigneusement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$1 \leqslant \frac{4}{(x+3)^2}$$

III

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on appelle factorielle n, notée $n!$ le produit de tous les entiers compris entre 1 et n. Ainsi :

- $1! = 1$; $2! = 1 \times 2 = 2$ (lire factorielle 2) ; $3! = 1 \times 2 \times 3$; $10! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9 \times 10 = 3\,628\,800$
- Par convention : $0! = 1$

Démontrer par récurrence sur n que :

$$\text{Pour tout } n \geqslant 4,\ n! \geqslant n^2.$$

IV

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On sait que $u_{102} = 47$ et $u_{157} = 25$.

Déterminer la raison r, le premier terme u_0 et calculer u_{3000}.

V

Soit (v_n) une suite géométrique de raison réelle q. On sait que $v_3 = 12$ et $v_6 = 324$.

1. Déterminer q.
2. En déduire v_4, v_7 et v_0.

VI

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2. Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation de (u_n).
3. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(X) = \frac{1}{2}x + 1$.
4. Démontrer la conjecture par récurrence.

VII

On considère la fonction $f \longmapsto x + \frac{1}{x-2}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$; mettre l'expression sous forme fractionnaire, la factoriser et étudier son signe.
4. En déduire les variations de f ; dresser le tableau de variation de f.
5. **Question facultative** :
   On appelle g la fonction définie par $g(x) = x$ et $\mathscr{D}$ la courbe représentative de g.
   (a) Que vaut $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - g(x)\right]$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - g(x)\right]$? Que peut-on en déduire ?
   (b) En étudiant le signe de $f(x) - g(x)$, quelle est la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$?
   (c) Tracer dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ la droite d'équation $x = 2$, $\mathscr{D}$ puis $\mathscr{C}$.