Stage de révision Terminale S 15 février 2014

I Amérique du Nord juin 2001 (4 points)

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. Calculer $P\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ et $P\left(-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = \left(z^2+3\right)Q(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\text{B}} = -\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\text{C}} = 3+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\text{D}} = \overline{z_{\text{C}}}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.
4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\dfrac{z_{\text{E}} - z_{\text{B}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{B}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

II Réunion juin 2007 (4 points)

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.
On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n, , $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. Étudier la monotonie de la suite u.
2. (a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$.
   Étudier le sens de variations de la fonction h.
   En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\,;\,0[$.
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.
3. Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

III Nouvelle-Calédonie novembre 2012

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on appelle A le point d'affixe 1 et $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique.

Partie A

On considère l'équation

$$(E):\quad z^2 - 2z + 2 = 0,$$

où z est un nombre complexe. On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
2. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{2z-1}{2z-2}.$$

1. Placer le point A et tracer le cercle $\mathscr{C}$ sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a
$$\left(z'-1\right)(z-1) = \frac{1}{2}.$$
3. Montrer que pour tout point M distinct de A on a :
   - $\text{A}M \times \text{A}M' = \dfrac{1}{2}$;
   - $M' \neq \text{A}$;
   - $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\text{A}M}\right) + \left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\text{A}M'}\right) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif
4. On considère le point P d'affixe $z_{\text{P}} = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.
5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P′, image de P par f, et réaliser cette construction.
6. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x = \dfrac{3}{4}$. Soit M' son image par f.
   (a) Montrer que le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre O de rayon 1.
   (b) Tout point de $\mathscr{C}'$ a-t-il un antécédent par f ?

IV Polynésie septembre 2010

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   (c) Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

La figure est donnée ci-dessous.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

- M le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$,
- P le point de coordonnées $(x\,;\,0)$,
- Q le point de coordonnées $(0\,;\,f(x))$.

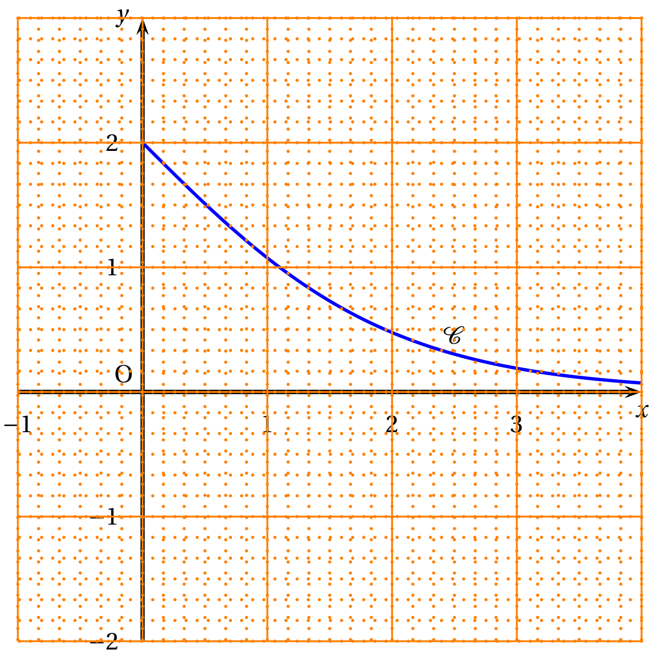
1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

2. Le point M a pour abscisse α.

   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathscr{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.



V Métropole septembre 2010

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. (a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

   (b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.

   (b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

   (b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).