Correction du contrôle nº 1 de spécialité

I (1,5 point)

Soient $2n+1$ et $2n+3$ deux entiers impairs consécutifs, avec $n \in \mathbb{Z}$; leur somme vaut $2n+1+2n+3 = 4n+4 = 4(n+1)$ avec $n+1 \in \mathbb{Z}$.
La somme est donc bien un multiple de 4.

II (2,5 points)

Soient a, b et n trois entiers naturels.

1. Si ab divise n, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = ab \times k$; alors $n = a \times (kb)$ et $n = b \times (ak)$ donc **a et b divisent n**.
2. La propriété réciproque est : « Si a et b divisent n, alors ab divise n ».
   Cette propriété réciproque est **fausse** ; par exemple, 4 et 6 divisent 12, mais $4 \times 6 = 24$ et 24 ne divise pas 12.

III (2 points)

On considère le polynôme n^2+2n-3.
1 est une racine évidente ; le produit des racines vaut -3, donc l'autre racine est -3.
On peut alors factoriser : $n^2+2n-3 = (n-1)(n+3)$.
Comme $n \geqslant 3$, $n-1$ et $n+3$ sont des facteurs supérieurs à 2 ; n^2+2n-3 s'écit alors comme produit de facteurs supérieurs ou égaux à deux, donc **ce n'est pas un nombre premier**.

IV (2 points)

$(n-4)$ divise $(3n+24) \Leftrightarrow \dfrac{3n+24}{n-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{3(n-4)+36}{n-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3+\dfrac{36}{n-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n-4$ divise 36.
L'ensemble des diviseurs de 36 est : $\mathscr{D}(36) = \{-36\,;\,-18\,;\,-12\,;\,-6\,;\,-4\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,6\,;\,12\,;\,36\}$
$n-4$ doit être un diviseur de 36, donc on doit avoir $n-4 = k$, $k \in \mathscr{D}(36)$, d'où $n = k+4$.
L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{\mathscr{S} = 32\,;\,-14\,;\,-8\,;\,-5\,;\,-2\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,10\,;\,13\,;\,16\,;\,22\,;\,40\}}$

V (2,5 points)

$x^2-y^2 = 7 \Leftrightarrow (x-y)(x=y) = 7$. $(x-y)$ et $(x+y)$ sont donc des diviseurs de 7. Remarquons que si x est une solution, alors $-x$ est également une solution ; de même pour y. On peut se restreindre à $\mathbb{N}$. Alors x et y sont positifs, donc $x+y$ est positif, d'où $x-y$ est positif. Alors $x+y \geq x-y$.
Les diviseurs de 7 dans $\mathbb{N}$ sont 1 et 7.
On résout le système : $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$.
On trouve $x=4$ et $y=3$. En revenant dans $\mathbb{Z}$, on trouve que l'ensemble des solutions est :
$\boxed{\mathscr{S} = \{(-4;-3);(-4;3),(4;-3);(4;3)\}}$.

VI (2 points)

$n+11$ est un multiple de $n-1$ si, et seulement si, $n-1$ divise $n+11$, donc si, et seulement si, $\dfrac{n+11}{n-1} \in \mathbb{Z}$.
$\dfrac{n+11}{n-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{n-1+12}{n-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1+\dfrac{12}{n-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (n-1) \mid 12 \Leftrightarrow n = 1+k,\ k \pm in\mathscr{D}(12)$.
L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{\mathscr{S} = \{-11\,;\,-5\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,7\,;\,13\}}$

VII (1,5 points)

On a : $\begin{cases} n = 137q+131 \\ n = 143q+5 \end{cases}$
En soustrayant les deux lignes, on obtient : $0 = 6q-126$, donc $q = 21$.
On en déduit $\boxed{n = 3\,008}$.

VIII (2 points)

Pour $n \geqslant 2$, on effectue la division euclidienne de $3^n - 1$ par 3^{n-1}.

Notons q_n le quotient et r_n le reste. $\dfrac{3^n-1}{3^{n-1}} < \dfrac{3^n}{3^{n-1}} = 3$ donc $q_n < 3$.

D'autre part, $\dfrac{''^n-1}{3^{n-1}} - 2 = \dfrac{3^n - 1 - 2\times 3^{n-1}}{3^{n-1}} = \dfrac{3^n - 2\times 3^{n-1} - 1}{3^{n-1}} = \dfrac{\left[3^{n-1}(3-2)\right]-1}{3^{n-1}} = \dfrac{3^{n-1}-1}{3^{n-1}} > 0$, car $n \geqslant 2$, donc $3^{n-1} > 1$.

On en déduit que $\dfrac{3^n-1}{3^{n-1}} > 2$.

Si on effectue la division euclidienne de $3^n - 1$ par 3^{n-1}, le quotient est 2. On obtient alors : $3^n - 1 = 3^{n-1} \times 2 + r_n$ d'où $r_n = 3^n - 1 - 2\times 3^{n-1} = 3^n - 2\times 3^{n-1} - 1 = 3^{n-1}(3-2) - 1 = 3^{n-1} - 1$.

r_n vérifie bien la condition : $0 \leqslant r_n < 3^{n-1}$.

$\boxed{\text{Le quotient est 2 et le reste est } r_n = 3^{n-1} - 1}$.

IX (1,5 points)

On obtient : $\begin{cases} a = bq + r \\ a + 15 = q(b+5) + r \end{cases}$.

D'après la deuxième ligne, $a + 15 = bq + 5q + r$; or $bq + r = a$ d'où : $15 = 5q$, donc $q = 3$.

Le quotient est $\boxed{q = 3}$.

X (2,5 points)

1. On considère l'équation dans $\mathbb{Z}$: $(x-5)(y-5) = 25$.

   $x - 5$ et $y - 5$ sont donc des diviseurs de 25 ; 25 étant positif, ces diviseurs doivent être de même signe.

   Les différents cas possibles sont :

   - $\begin{cases} x-5 = 25 \\ y-5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 6 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x-5 = 5 \\ y-5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x-5 = 1 \\ y-5 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 30 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x-5 = -25 \\ y-5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -20 \\ y = 4 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x-5 = -5 \\ y-5 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x-5 = -1 \\ y-5 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 30 \end{cases}$

   Les couples solutions sont donc : $\boxed{\mathscr{S} = \{(-20\,;\,4)\,;\,(4\,;\,30)\,;\,(0\,;\,0)\,;\,(6\,;\,30)\,;\,(10\,;\,10)\,;\,(30\,;\,6)\}}$.

2. On considère l'équation $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$ dans $\mathbb{Z}$.

   On doit avoir $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

   Pour $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,0)$, on a :

   $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow xy - 5(x+y) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(y-5) - 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(y-5) = 25$.

   On retrouve l'équation vue en 1.

   Cependant, il fait exclure le couple $(0\,;\,0)$.

   L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{\mathscr{S} = \{(-20\,;\,4)\,;\,(4\,;\,30)\,;\,(6\,;\,30)\,;\,(10\,;\,10)\,;\,(30\,;\,6)\}}$