Chapitre III - Feuille d'exercices (1)

I Métropole juin 2011

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 9 \quad [17] \\ n & \equiv & 3 \quad [5] \end{array}\right.$$

1. Recherche d'un élément de $\mathscr{S}$.
   On désigne par $(u\ ;\ v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u+5v=1$.
   (a) Justifier l'existence d'un tel couple $(u\ ;\ v)$.
   (b) On pose $n_0 = 3\times 17u + 9\times 5v$.
   Démontrer que n_0 appartient à $\mathscr{S}$.
   (c) Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathscr{S}$.
2. Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$.
   (a) Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
   Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \quad [85]$.
   (b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43+85k$ où k est un entier relatif.
3. Application
   Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.
   Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.
   Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
   Combien a-t-elle de jetons ?

II Antilles-Guyane juin 2011

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.
   (b) En déduire une solution particulière de l'équation (E).
   (c) Résoudre l'équation (E).
   (d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50$.
   Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble $\mathscr{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.
2. On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.
   (b) Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

   Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?
   (c) En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.
3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\ ;\ y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

III France, septembre 2006

1. On considère l'équation $(\mathscr{E})$: $17x - 24y = 9$, où $(x,\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.
   (a) Vérifier que le couple (9 ; 6) est solution de l'équation $(\mathscr{E})$.
   (b) Résoudre l'équation $(\mathscr{E})$.
2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un un manège circulaire représenté par le schéma de l'annexe 2. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.
   Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui, se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.
   Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.
   À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A
   (a) On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon. À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que $(x,\ y)$ est solution de l'équation $(\mathscr{E})$ de la question 1.
   (b) Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?
   (c) Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.
   (d) Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

Figure du III

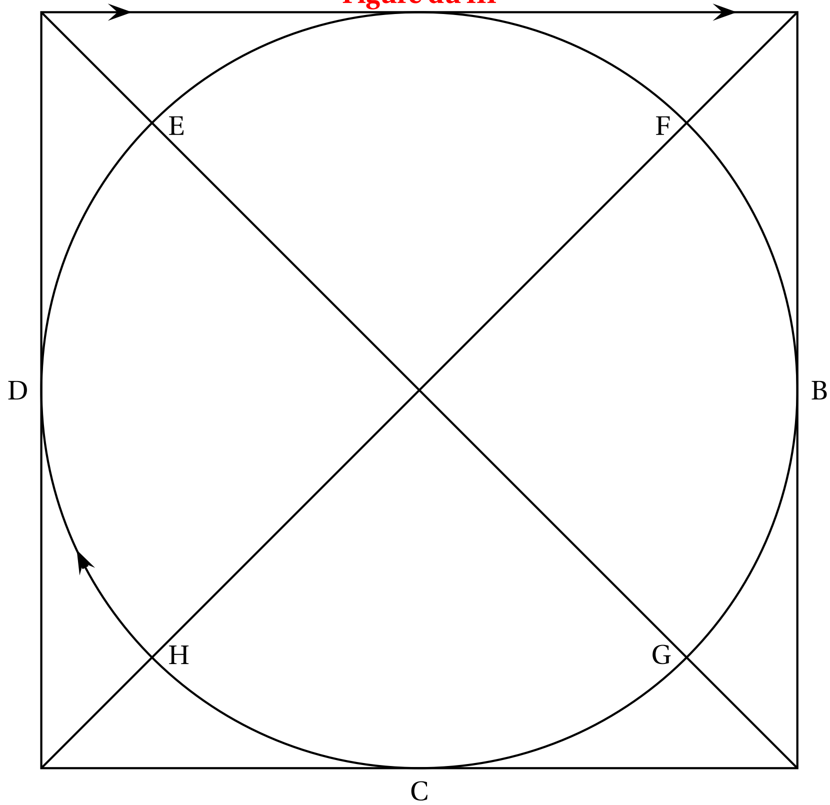
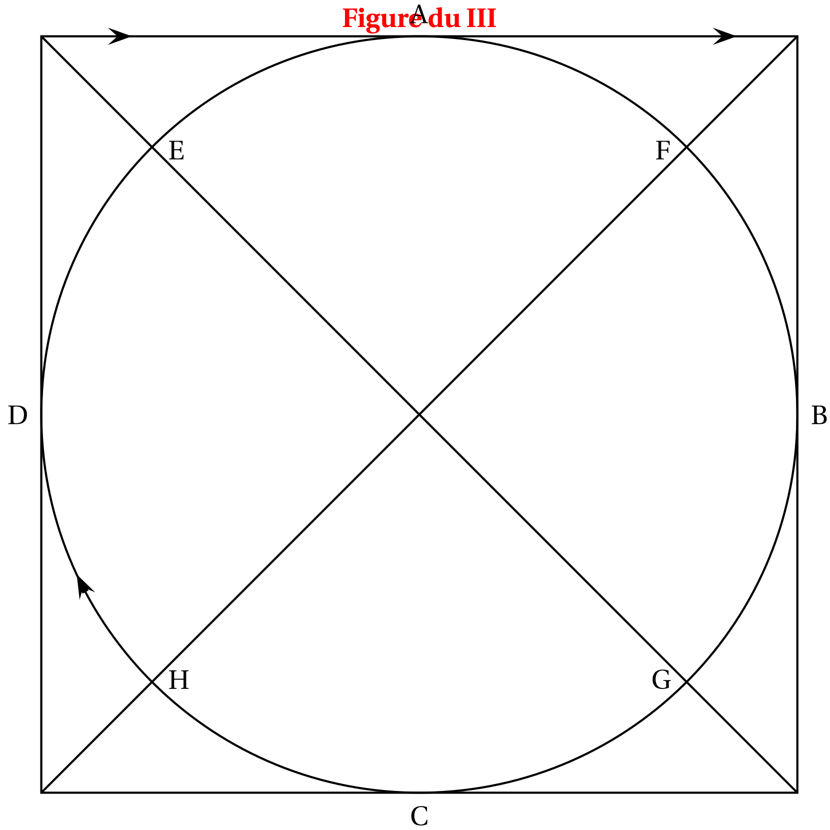


Figure du III



Correction

I Métropole juin 2011

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n & \equiv & 9 & [17] \\ n & \equiv & 3 & [5] \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de $\mathscr{S}$.
   On désigne par $(u\ ;\ v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u+5v=1$.
   (a) 17 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout, il existe u et v entiers relatifs tels que $17u+5v=1$.

   (b) On pose $n_0 = 3\times 17u+9\times 5v$.
   Soit $(u\ ;\ v)$ un couple solution, donc $17u+5v=1$. On en déduit que $17u\equiv 1$ [5] et $5v\equiv 1$ [17].
   Alors $n_0 = 3\times 17u+9\times 5v \equiv 9\times 5v$ [17] $\equiv 9\times 1$ [17] $\equiv 9$ [17].
   De même : $n_0 = 3\times 17u+9\times 5v \equiv 3\times 17u$ [5] $\equiv 3\times 1$ [5] $\equiv 3$ [5].
   Par conséquent, $n_0 \in \mathscr{S}$.
   (c) Appliquons l'algorithme d'Euclide :
   $17 = 3\times 5+2$ et $5 = 2\times 2+1$, d'où $1 = 5-2\times 2$
   $= 5-(17-5\times 3)\times 2 = 17\times(-2)+5\times 7$.
   On peut prendre $(u\ ;\ v) = (-2\ ;\ 7)$.
   On obtient alors $n_0 = 213$ (ce n'est évidemment pas la seule valeur !)
2. Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$.
   (a) Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
   $n\equiv 9$ [17] et $n_0\equiv 9$ [17] donc $n-n_0\equiv 0$ [17].
   De même, $n\equiv 3$ [5] et $n_0\equiv 3$ [5] donc $n-n_0\equiv 0$ [5].
   17 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après la partie A, $n-n_0\equiv 0$ [85] (car $5\times 17=85$).

   (b) On en déduit que, si $n\in\mathscr{S}$, $n\equiv n_0$ [85] donc $n\equiv 213$ [85].
   Or $213 = 270+43 = 2\times 85+43 \equiv 43$ [85] donc $213\equiv 43$ [85].
   Par conséquent : $n\in\mathscr{S} \equiv n\equiv 43$ [85] donc $n = 43+85k$, $k\in\mathbb{Z}$.

   Réciproquement, si $n\equiv 43+85k$, $k\in\mathbb{Z}$, il est clair que $n\equiv 9$ [17] et $n\equiv 3$ [5].
3. Application :
   Soit n le nombre de jetons. On a : $n\equiv 9$ [17] et $n\equiv 3$ [5].
   D'après ce qui précèe, on a : $n = 43+85k$.
   On sait que $300\leqslant n\leqslant 400$, donc $300\leqslant 43+85k\leqslant 400$. On en déduit que $k=4$ et que Zoé a 283 jetons.

II Antilles juin 2011

1. (a) Les entiers 11 et 7 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $11u-7v=1$. Par ailleurs $11\times 2-7\times 3=1$, le couple (2 ; 3) répond alors à la question.
   (b) On a, en multipliant chaque membre de la dernière égalité par 5, $11\times 10-7\times 15=5$. Le couple $(10\ ;\ 15)$ est donc une solution particulière de (E).
   (c) Soit $(x\ ;\ y)$ une solution de (E), alors $11x-7y = 11\times 10-7\times 15$, d'où :

   $$11(x-10) = 7(y-15). \qquad (1)$$

   7 divise $11(x-10)$ et est premier avec 11, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $x-10$: il existe donc un entier relatif k tel que $x-10=7k$. En remplaçant $x-10$ par $7k$ dans (1), puis en simplifiant, on en déduit que $y-15=11k$. Ainsi, si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors nécessairement $(x\ ;\ y)$ est de la forme $(10+7k\ ;\ 15+11k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Réciproquement, on vérifie aisément que de tels couples sont bien solutions de (E).

(d) Un point de D à coordonnées entières appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\begin{cases} x \in \mathbb{Z}\ ;\ y \in \mathbb{Z} \\ 11x - 7y = 5 \\ 0 \leqslant x \leqslant 50\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x\ ;\ y) \text{ solution de (E)} \\ 0 \leqslant x \leqslant 50\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant 50 \end{cases}$ On cherche donc tous les entiers relatifs k tels que $0 \leqslant 10 + 7k \leqslant 50$ et $0 \leqslant 15 + 11k \leqslant 50$, ce qui équivaut à $-\dfrac{10}{7} \leqslant k \leqslant \dfrac{50}{7}$ et $-\dfrac{15}{11} \leqslant k \leqslant \dfrac{35}{11}$. Les seules valeurs possibles de k sont -1, 0, 1, 2 et 3. Il y a donc cinq points de $\mathscr{C}$ donc les coordonnées sont entières :

$$A(3\ ;\ 4) \quad B(10\ ;\ 15) \quad C(17\ ;\ 26) \quad D(24\ ;\ 37) \quad E(31\ ;\ 48).$$

2. (a) On a $11 \equiv 1\ (5)$, $7 \equiv 2\ (5)$ et $5 \equiv 0\ (5)$, par conséquent, si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), en « passant » aux congruences : $11x^2 - 7y^2 = 5$ devient $x^2 - 2y^2 \equiv 0\ (5)$, c'est-à-dire $x^2 \equiv 2y^2\ (5)$.

(b) On calcule aisément :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	3	2

Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 par 5 sont donc 0, 1 et 4. De même, les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $2y^2$ par 5 sont 0, 2 et 3.

(c) Si $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2\ (5)$ ce qui n'est possible, d'après les tableaux précédents, que si $x \equiv 0\ (5)$ et $y \equiv 0\ (5)$, c'est-à-dire si x et y sont des multiples de 5.

3. Supposons que x et y sont deux entiers multiples de 5. Alors il existe des entiers a et b tels que $x = 5a$ et $y = 5b$. En « réinjectant » cela dans l'équation (F) on a alors : $11 \times 25a^2 - 7 \times 25b^2 = 5$, c'est-à-dire $25(11a^2 - 7b^2) = 5$, ce qui est impossible (5 n'est pas multiple de 25 !). L'équation (F) ne possède donc aucune solution.

III France, septembre 2006

1. Soit $(\mathscr{E})$ l'équation $17x - 24y = 9$.

(a) Nous avons : $17 \times 9 - 24 \times 6 = 153 - 144$
$17 \times 9 - 24 \times 6 = 9$ doncle couple $(9\ ;\ 6)$ est solution de $(\mathscr{E})$.

(b) $(\mathscr{E})$ équivaut à : $17x - 24y = 17 \times 9 - 24 \times 6 \Leftrightarrow 17(x - 9) = 24(y - 6)$.
24 divise $17(x-9)$ et 24 et 17 sont premiers entre eux donc 24 divise $x - 9$ (théorème de Gauss) ; il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 9 = 24k$.
$(\mathscr{E})$ équivaut à : $\begin{cases} 17 \times 24k = 24(y-6) \\ x - 9 = 24k\ (k \in \mathbb{Z}.) \end{cases}$
On en déduit : $x = 9 + 24k,\ k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ est l'ensemble des couples $\{(9 + 24k\ ;\ 6 + 17k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. (a) Soit t le temps en secondes au bout duquel Jean attrape le pompon en A, x le nombre de tours effectués à l'instant t par le pompon, y le nombre de tours effectués à l'instant t par Jean depuis son premier passage en A.
x et y sont deux entiers naturels.
Pour le pompon : $t = 17x$.
Pour Jean : il met 9 secondes pour aller de H à A, puis 24 secondes par tour, donc $t = 9 + 24y$.
On en déduit : $17x = 9 + 24y$, c'est-à-dire : $17x - 24y = 9$.
$(x\ ;\ y)$ donc bien solution de l' équation $(\mathscr{E})$.

(b) D'après la question 1., la plus petite valeur entière positive de y telle que $(x\ ;\ y)$ soit solution de l'équation $(\mathscr{E})$ (avec x et y entiers) est
$y = 6$ (pour $k = 0$). On a alors $x = 9$.
Jean se trouve donc pour la première fois en A en même temps que le pompon après avoir fait 6 tours depuis son premier passage en A ;
le pompon a alors fait 9 tours complets.
Le temps t (en secondes) écoulé depuis le départ est : $t = 9 + 24 \times 6$, soit $t = 153$ (on a aussi $17 \times 9 = 153$).

Jean et le pompon se trouvent pour la première fois ensemble au point A 153 secondes après le départ.
Donc si Jean ne reste que 2 minutes, soit 120 secondes, sur le manège, il n'aura pas le temps d'attraper le pompon.

(c) On suppose toujours qu'à l'instant $t = 0$, Jean part de H et le pompon part de A.
Supposons qu'au bout d'un temps t (en secondes) Jean et le pompon sont ensemble au point B. Comme précédemment, on note x le nombre de tours effectués à l'instant t par le pompon depuis son premier passage en B et y le nombre de tours effectués à l'instant t par Jean depuis son premier passage en B, avec x et y entiers naturels.
Le pompon met $\frac{17}{4}$ secondes pour aller de A à B, puis 17 secondes par tour, donc $t = \frac{17}{4} + 17x$.
Jean met $\frac{5}{8} \times 24$ secondes, c'est-à-dire 15 secondes, pour aller de H à B, puis 24 secondes par tour, donc $t = 15 + 24y$.
On a donc : $\frac{17}{4} + 17x = 15 + 24y$, qui équivaut à :

$$17x - 24y = 15 - \frac{17}{4}$$

c'est-à-dire à : $17x - 24y = \frac{43}{4}$, ou encore : $68x - 96y = 43$.
Le PGCD de 68 et 96 est 4, et 43 n'est pas divisible par 4, donc cette équation n'admet aucune solution $(x\,;\,y)$, avec x et y entiers.
Donc Jean et le pompon ne peuvent pas se trouver au même instant au point B.

De même, supposons qu'au bout d'un temps t (en secondes) Jean et le pompon sont ensemble au point C.
On note x le nombre de tours effectués à l'instant t par le pompon depuis son premier passage en C et y le nombre de tours effectués à l'instant t par Jean depuis son premier passage en C, avec x et y entiers naturels.
Le pompon met $\frac{17}{2}$ secondes pour aller de A à C, puis 17 secondes par tour, donc $t = \frac{17}{2} + 17x$.
Jean met $\frac{7}{8} \times 24$ secondes, c'est-à-dire 21 secondes, pour aller de H à C, puis 24 secondes par tour, donc $t = 21 + 24y$.
On a donc : $\frac{17}{2} + 17x = 21 + 24y$, qui équivaut à :

$$34x - 48y = 25.$$

Cette équation n'admet aucune solution $(x\,;\,y)$, avec x et y entiers.
Donc Jean et le pompon ne peuvent pas se trouver au même instant, au point C.

Enfin, supposons qu'au bout d'un temps t (en secondes) Jean et le pompon sont ensemble au point D.
On note de la même manière x le nombre de tours effectués à l'instant t par le pompon depuis son premier passage en D et y le nombre de tours effectués à l'instant t par Jean depuis son premier passage en D, avec x et y entiers naturels.
Le pompon met $\frac{3}{4} \times 17$ secondes, soit $\frac{51}{4}$ secondes pour aller de A à D, puis 17 secondes par tour, donc $t = \frac{51}{4} + 17x$.
Jean met 3 secondes pour aller de H à D, puis 24 secondes par tour donc $t = 3 + 24y$.
On a donc : $\frac{51}{4} + 17x = 3 + 24y$, qui équivaut à : $68x - 96y = -39$.
Cette équation n'admet aucune solution $(x\,;\,y)$, avec x et y entiers.
Donc Jean et le pompon ne peuvent pas se trouver au même, au point D. En fait, Jean ne peut attraper le pompon qu'au point A.

(d) On suppose qu'à l'instant $t = 0$, Jean part du point E, que le pompon part toujours du point A et qu'au bout d'un temps t (en secondes) Jean et le pompon sont ensemble au point A.
On note x le nombre de tours effectués à l'instant t par le pompon et y le nombre de tours effectués à l'instant t par Jean depuis son premier passage en A avec x et y entiers naturels.
Pour le pompon : $t = 17x$.

Pour Jean : il met 3 secondes pour aller de E à A, puis 24 secondes par tour d'où $t = 3 + 24y$.
On a donc l'équation : $17x = 3 + 24y$ qui équivaut à : $17x - 24y = 3$.
Le couple $(3\ ;\ 2)$ est une solution de cette équation.
$17 \times 3 = 51$; $3 + 24 \times 2 = 51$.
Au bout de 51 secondes, le pompon aura fait 3 tours complets, et Jean aura fait le déplacement du point E au point A, puis 2 tours complets.
51 secondes après le départ, Jean et le pompon seront tous les deux au point A, donc Jean a le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes pour lesquelles il a payé !