Correction du contrôle de spécialité sur les congruences

I

$12 \equiv 2\ [5]$ donc $12^{1527} \equiv 2^{1527}$.
On a : $2^4 = 16 \equiv 1\ [5]$.
$1527 = 4 \times 381 + 3$ donc $2^{1527} = 2^{4\times 381+3} = \left(2^4\right)^{381} \times 2^3$.
$2^4 \equiv 1\ [5]$ donc $\left(2^4\right)^{381} \times 2^3 \equiv 1^{381} \times 2^3\ [5] \equiv 8\ [5] \equiv 3\ [5]$.
$0 \leqslant 3 < 5$ donc le reste de la division euclidienne de 12^{1527} est $\boxed{3}$.

II

1. $3^2 = 9 \equiv 2\ [7]$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} = \left(3^2\right)^n = 9^n \equiv 2^n\ [7]$ donc $\boxed{3^{2n} \equiv 2^n\ [7]}$.
2. On en déduit que, pour tout n, $3^{2n} \equiv 2^n$ est **divisible par 7**.

III

On procède par **disjonction des cas**.
On étudie les cas $n \equiv r\ [5]$, pour $0 \leqslant r < 5$.

r	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv \cdots\ [5]$	0	1	4	4	1
$n^2 - 3n + 6 \equiv \cdots\ [5]$	1	4	4	1	0

On en déduit que $n^2 - 3n + 6$ est divisible par 5 pour $n \equiv 4\ [5]$.
L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}\{4 + 5k,\ k \in \mathbb{Z}}$.

IV

$7^2 = 49 \equiv 1\ [4]$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$7^{2n} = \left(7^2\right)^n \equiv 1^n\ [4] \equiv 1\ [4]$
On en déduit que $7^{2n} - 1 \equiv 0\ [4]$.
$7^{2n} - 1$ est donc divisible par 4 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V

1. (a) $2^3 = 8 \equiv 1\ [7]$. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2^{3k} = \left(2^3\right)^k \equiv 1^k\ [7] \equiv 1\ [7]$
   (b) $22\,009 = 7 \times 3\,144 + 1$ donc le reste de la division euclidienne de $22\,009$ par 7 est 3.
   Remarque : en fait, il y avait une erreur dans l'énoncé; on voulait calculer le reste de 2^{2009} dans la division euclidienne par 7.
   $2\,009 = 3 \times 669 + 2$ donc $2^{2009} = 2^{3\times 669+2} = 2^{3\times 669} \times 2^2$
   $\equiv 1 \times 2^2\ [7] \equiv 4\ [7]$. Le reste cherché est donc $\boxed{4}$.
2. (a) $10 \equiv 3\ [7]$ donc $10^3 \equiv 3^3\ [7] \equiv 27\ [7] \equiv -1\ [7]$ donc $\boxed{10^3 \equiv -1\ [7]}$.
   (b) $N = a \times 10^3 + b \equiv a \times (-1) + b\ [7] \equiv b - a\ [7]$.
   $\boxed{N \equiv b - a\ [7]}$. N est divisible par 7 si, et seulement si, $N \equiv 0\ [7] \Leftrightarrow \equiv b - a \equiv 0\ [7] \equiv \boxed{a \equiv b\ [7]}$.
   On en déduit que $a = b$ ou $a - b = 7 ou -7$.
   La liste des nombres N possibles est :
   $\boxed{\mathscr{S} = \{1001\,;\ 1008\,;\ 2002\,;\ 2009\,;\ 3003\,;\ 4004\,;\ 5005\,;\ 6006\,;\ 7000\,;\ 7007\,;\ 8001\,;\ 8008\,;\ 9002\,;\ 9009\}}$

VI

1. (a) Soient n, a, b, c et d des entiers tels que $n \geqslant 0$, $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$.

   D'après le prérequis :
   $a \equiv b\ [n]$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $a - b = kn$.
   $c \equiv d\ [n]$ si, et seulement si, il existe un entier k' tel que $c - d = k'n$.
   Alors : $ac = (b + kn)(d + k'n) = bd + n(bk' + dk + kk'n)$.
   Or, $bk' + dk + kk'n \in \mathbb{Z}$, par conséquent $\boxed{ac \equiv bd\ [n]}$.
2. $4^0 \equiv 1\ [7]$; $4^1 \equiv 4\ [7]$; $4^2 \equiv 16 \equiv 2\ [7]$ et $4^3 \equiv 64 \equiv 1\ [7]$.
   On **conjecture** donc que :
   pour tout entier naturel n :
   - si $n \equiv 0\ [3]$ alors $4n \equiv 1\ [7]$;
   - si $n \equiv 1\ [3]$ alors $4n \equiv 4\ [7]$;
   - si $n \equiv 2\ [3]$ alors $4n \equiv 2\ [7]$.

   Montrons alors cette conjecture :

   - Si $n \equiv 0\ [3]$ alors il existe un entier naturel k tel que $n = 3k$. Par conséquent $4n = 4^{3k} = \left(4^3\right)^k \equiv 1^k\ [7] \equiv 1\ [7]$.
   - Si $n \equiv 1\ [3]$ alors il existe un entier naturel k tel que $n = 3k + 1$. Par conséquent $4n = 4^{3k+1} = \left(4^3\right)^k \times 4^1 \equiv 1^k \times 4\ [7] \equiv 4\ [7]$.
   - Si $n \equiv 2\ [3]$ alors il existe un entier naturel k tel que $n = 3k + 2$. Par conséquent $4n = 4^{3k+2} = \left(4^3\right)^k \times 4^2 \equiv 1^k \times 4^2\ [7] \equiv 2\ [7]$.

   De plus, 1, 4 et 2 sont des entiers des l'intervalle $[0\,;\ 7[$. Par conséquent, d'après l'unicité de la division euclidienne, le reste r la division euclidienne de 4^n par 7 est :
   - 1 si $n \equiv 0\ [3]$;
   - 4 si $n \equiv 1\ [3]$;
   - 2 si $n \equiv 2\ [3]$.
3. (a) $851 = 7 \times 121 + 4$ et $0 \leqslant 4 < 7$. Le reste de la division euclidienne de 851 par 7 est donc $\boxed{4}$.
   (b) Soit n un entier naturel.
   $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n \equiv 4^{3n} + 4^{2n} + 4^n\ [7]$
   $\equiv 1 + 4^{2n} + 4^n\ [7]$.
   D'après les questions précédentes :
   - si $n \equiv 0\ [3]$, alors $A \equiv 1 + 1 + 1\ [7] \equiv 3\ [7]$;
   - si $n \equiv 1\ [3]$, alors $A \equiv 1 + 4^2 + 4 \equiv\ [7] \equiv 1 + 2 + 4\ [7] \equiv 0\ [7]$;
   - si $n \equiv 2\ [3]$, alors $A \equiv 1 + 2^2 + 2\ [7] \equiv 7\ [7] \equiv 0\ [7]$.

   Or, 0 et 3 sont des entiers naturels de l'intervalle $[0\,;\ 7[$. Par conséquent, le reste dans la division euclidienne de A par 7 est :
   - 0 si $n \equiv 1\ [3]$ ou si $n \equiv 2\ [3]$;
   - 3 si $n \equiv 0\ [3]$.
4. On considère le nombre B s'écrivant en base 4 :
   $B = \overline{21032114}^4$.
   Alors $B = 1 + 4 + 2 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + 4^5 + 2 \times 4^6 = 1 + 4 \times K$ avec $K = 1 + 2 \times 4 + 3 \times 4^2 + 4^4 + 2 \times 4^5 \in \mathbb{Z}$.
   $B \equiv 1\ [4]$ De plus, $0 \leqslant 1 < 4$. Donc le reste dans la division euclidienne de B par 4 est $\boxed{1}$.