

Exercices de spécialité

I

Montrer que $81n^5 - 45n^3 + 4n$ est divisible par 5 quel que soit l'entier n .
(On pourra utiliser une décomposition de cette expression en produit de facteurs).

II

Déterminer l'ensemble des naturels n pour lesquels le nombre $2^n - 5$ est divisible par 9.

III

Corentin remarque que l'année 2002 a la particularité suivante : $2002^4 + 4$ est divisible par 10. Quelles sont les autres années vérifiant cette particularité ?

IV

1. Comment faut-il choisir le naturel n pour que $A = 2^n - 1$ soit divisible par 9 ?
2. Cette condition étant supposée réalisée, montrer que A est divisible par 7.
Quel est le reste de la division de A par 21 ?

V

Montrer que, pour tout naturel n , l'entier $2^{5n+1} + 3^{n+3}$ est divisible par 29.

VI Preuve par 9 de la multiplication

On veut trouver un procédé permettant de vérifier l'exactitude du résultat m de la multiplication de deux entiers a et b .

On suppose évidemment qu'on n'a pas de calculatrice sous la main pour effectuer cette multiplication ou même pour la vérifier.

On note α , β et μ les restes respectifs dans la division euclidienne par 9 de a , b et m .

On note aussi γ le reste de la multiplication de $\alpha\beta$ par 9.

1. Montrer que, si la multiplication est juste, alors $\gamma = \mu$. Ce procédé s'appelle la preuve par 9 de la multiplication. La disposition traditionnellement adoptée est en croix.
2. Une preuve exacte assure-t-elle de l'exactitude du résultat de la multiplication ?
3. Inventer la preuve par 5 de la multiplication.
4. Pourquoi la preuve par 9 est-elle plus sûre que beaucoup d'autres preuves ?

VII Critère de divisibilité par 6

Soit s le nombre obtenu en ajoutant le chiffre des unités et le quadruple de la somme des autres chiffres d'un entier naturel N .

1. Montrer que $N \equiv s \pmod{6}$.
2. En déduire un critère de divisibilité par 6.

VIII La clé du relevé d'identité

Le relevé d'identité bancaire (RIB) comporte de gauche à droite 5 chiffres pour le code de la banque, 5 chiffres pour le code du guichet, 11 chiffres pour le numéro du compte et 2 chiffres pour la clé.

La clé K est calculée de la manière suivante : soit A le nombre constitué par les 21 chiffres de gauche ; on calcule le reste r de la division euclidienne de $100A$ par 97, puis on prend $K = 97 - r$.

1. Calculer la clé pour le relevé suivant : 169450040004581553811xx.
2. Comment mener le calcul avec une calculatrice ? On pourra écrire $100A$ sous la forme $10^{12}a + 10^6b + c$.
3. Déterminer les restes dans la division euclidienne par 97 des nombres 10^n , avec n entier compris entre 1 et 20.
4. Soit A_1 le nombre constitué par un RIB, la clé étant comprise. Montrer que si un des chiffres de A_1 et un seul est erroné, l'erreur est détectée.
5. Montrer que si deux chiffres consécutifs distincts sont permutés, alors l'erreur est détectée. (D'après Irem de Marseille)