Exemple de codage par exponentiation

On affecte à chaque entier compris entre 0 et 30 une lettre de l'alphabet ou un autre symbole (on affecte A à 0, B à 1, ..., Z à 25, α à 26, β à 27, γ à 28, δ à 29 et ε à 30), puis on fait subir à chacun de ces entiers x la transformation f suivante : $x \mapsto y$, où y est le reste dans la division euclidienne par 31 de x^7.
On note $\mathscr{E} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ 30\}$.
La clé de ce codage est 31.

a) Coder le mot GERMAINE.

b) Montrer que 7 et 30 sont premiers entre eux et écrire l'égalité de Bézout correspondante.

c) En utilisant le petit théorème de Fermat, montrer que, si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.
En déduire que deux éléments différents de $\mathscr{E}$ ont deux images différentes par f

d) Soient x et y éléments de $\mathscr{E}$ tels que $y \equiv x^7$ [31].
Montrer que $y^{13} \equiv x$ [31].
La clé de décodage est donc 13.

e) Décoder alors le mot YCEγQN.