Révisions du 14 février 2014

Table des matières

I Pondichéry avril 2014 1
II Liban mai 2014 1
III Métropole juin 2014 2
IV Antilles-Guyane septembre 2014 2
V Polynésie septembre 2010 3
VI Réunion juin 2006 4

I Pondichéry avril 2014

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe
$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

2. (a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

   (c) Que dire de la longueur $\mathrm{O}A_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	  n prend la valeur $n+1$
	  R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

   (a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

   (b) Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. (a) Démontrer que le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

   (b) On admet que $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

   (c) Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
   Les traits de construction seront apparents.

II Liban mai 2014

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+\mathrm{i}$.

   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

III Métropole juin 2014

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.

   Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.

   Calculer a^2 sous forme algébrique.

   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

   $$z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. **Restitution organisée de connaissances**

   On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $z = x - \mathrm{i}y$.

   Démontrer que :

   — Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

   — Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.
4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).

   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

IV Antilles-Guyane septembre 2014

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

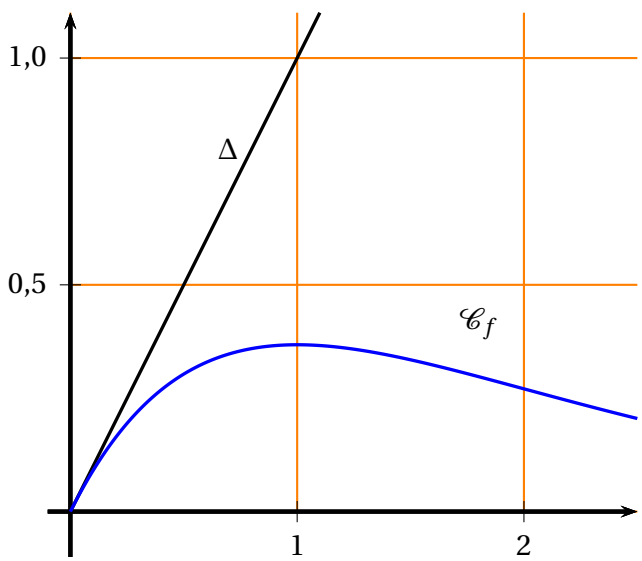
Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer sur le graphique donné ci-dessous, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   (b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $xe^{-x} = x$.

   Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.



Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Compléter l'algorithme donné ci-dessous afin qu'il calcule S_{100}.

```
Déclaration des variables :
        S et u sont des nombres réels
        k est un nombre entier
Initialisation :
        u prend la valeur ......
        S prend la valeur ......
Traitement :
        Pour k variant de 1 à ....
                u prend la valeur u × e^(-u)
                S prend la valeur ....
        Fin Pour
        Afficher ......
```

V Polynésie septembre 2010

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   (c) Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

La figure est donnée ci-dessous.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

- M le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$,
- P le point de coordonnées $(x\,;\,0)$,
- Q le point de coordonnées $(0\,;\,f(x))$.

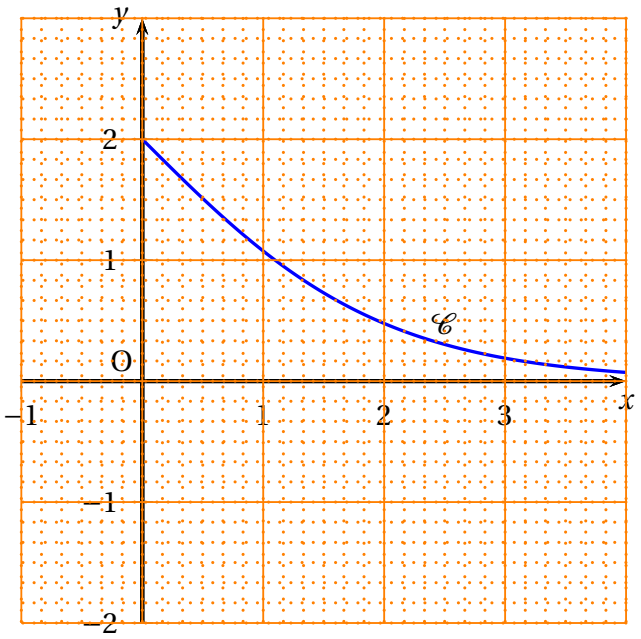
1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

2. Le point M a pour abscisse α.

   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathscr{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.



VI Réunion juin 2006

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

1. (a) Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

   (b) Étudier les variations de la fonction f.

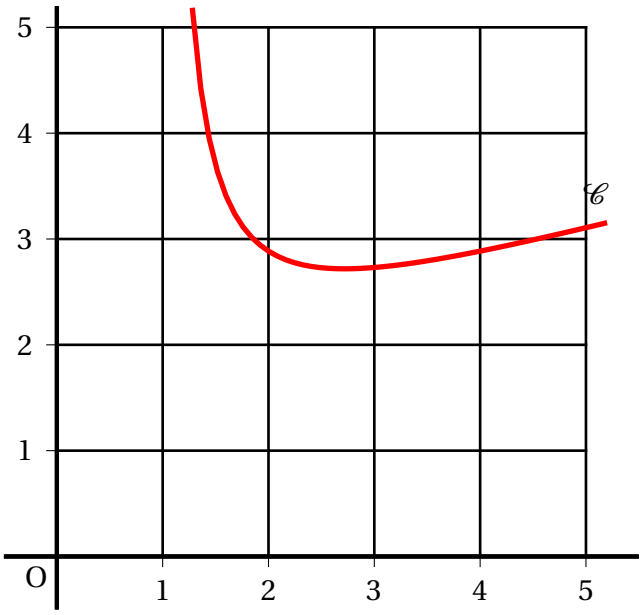
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

   (a) On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \mathrm{e}$ (on pourra utiliser la question 1. b.).

   (c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

Partie B

On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

1. En étudiant de deux manières la limite de la suite $\big(f(u_n)\big)$, démontrer que $f(\ell) = \ell$.
2. En déduire la valeur de ℓ.