Exrcices de révision (bac)

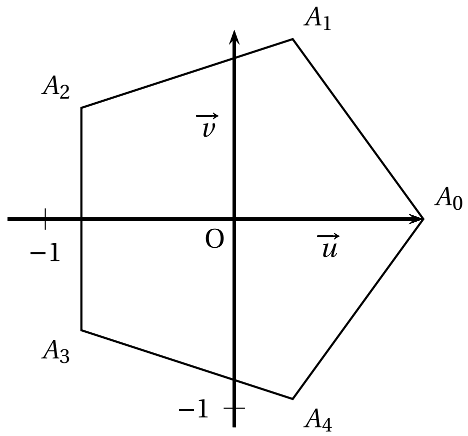
I Pondichéry avril 2016

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{u}$.

On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, ci-dessous :

- les cinq côtés sont de même longueur;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique;
- pour tout entier k appartenant à $\{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$ on a $\left(\overrightarrow{OA_k}\,;\,\overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \dfrac{2\pi}{5}$.



1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

   Le cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon $\dfrac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K.

   Calculer BJ, puis en déduire BK.

2. (a) Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.

   (b) Démontrer que $BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

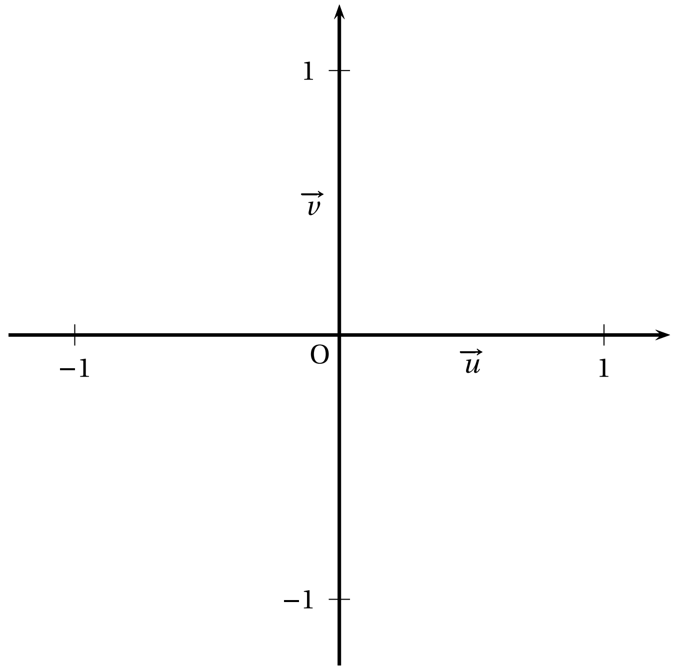
   (c) Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

► Calcul formel	
1	cos (4*pi/5)
	$\rightarrow \dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$
2	sqrt((3 - sqrt(5))/2)
	$\rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

« sqrt »signifie « racine carrée »

   En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

3. Dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

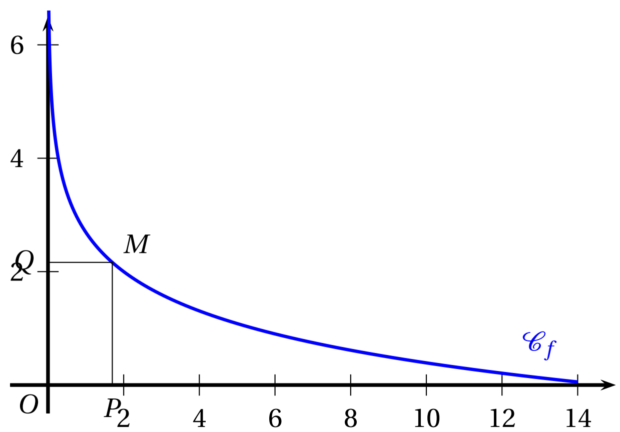


II Pondichéry avril 2016

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ? Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.

III Pondichéry avril 2016

On souhaite stériliser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25\,°\text{C}$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100\,°\text{C}$.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à $85\,°\text{C}$.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

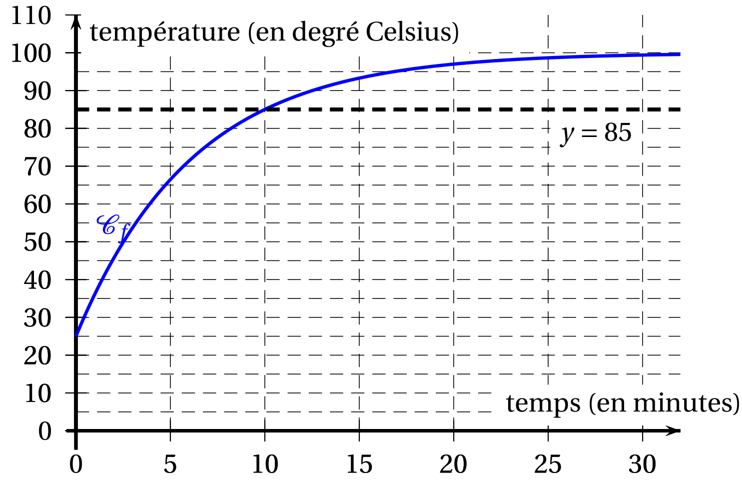
Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.
   Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a
$$T_n = 100 - 75 \times 0,85^n.$$
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-t-elle ?

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :
$$f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

1. (a) Étudier le sens de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   (b) Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.
2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.
   On note $\mathscr{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$,
   $y = 85$ et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.
   On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathscr{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



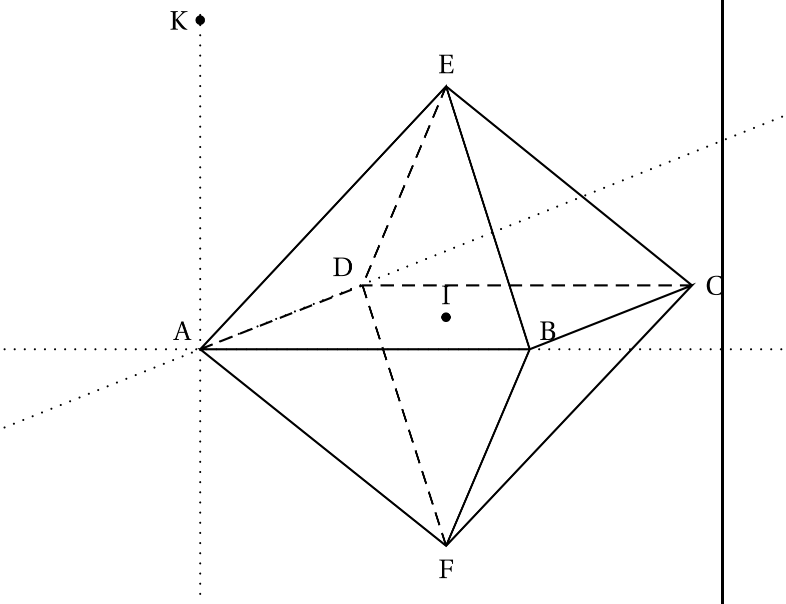
   (a) Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe, que l'on a $\mathscr{A}(25) > 80$.
   (b) Justifier que, pour $\theta \geqslant 10$, on a
   $$\mathscr{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t.$$
   (c) La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

IV Liban mai 2016

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée ci-dessous. Toutes les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AK}}\right)$.

1. (a) Montrer que $\text{IE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.
   (b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).
2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].
   (a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.
   (b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

(c) Construire sur la figure ci-dessous la section du solide ADECBF par le plan (EMN).



V Liban mai 2016

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}.$$

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}}$ (on rappelle que $\mathrm{e}=\mathrm{e}^1$).
3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\ln(2)+1-\ln(1+\mathrm{e})$.

Partie B

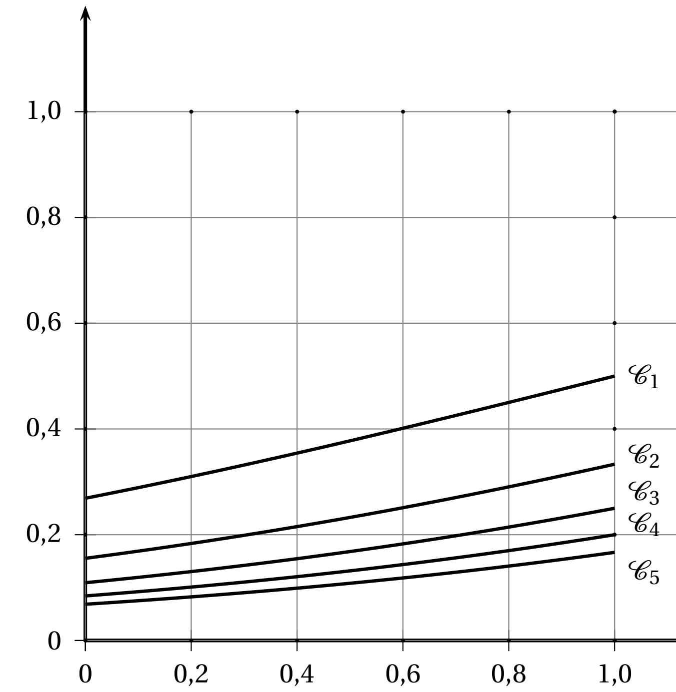
Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0;1]$ par :

$$f_n(x)=\frac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère la suite de terme général

$$u_n=\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. On a tracé ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0.



2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
   Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

VI Amérique du Nord juin 2016

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4i et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n=(1+\mathrm{i})^n$.

1. Écrire le nombre $1+\mathrm{i}$ sous forme exponentielle.
2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier
   $n\geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

VII Polynésie juin 2016

Soit u la suite définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1}=2u_n+2n^2-n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n=u_n+2n^2+3n+5.$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

VIII Asie juin 2016

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises. Cet exercice envisage dans la partie A la production de fraises, et dans la partie B leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : production de fraises

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

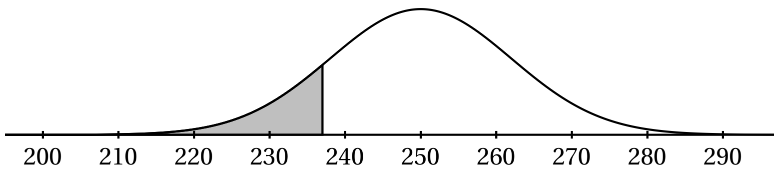
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.
La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



1. On donne $P(X \leqslant 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».

2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.

   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

   (b) Démontrer que $P\left(Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.

   (c) En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.

   (a) Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $]250 - n\ ;\ 250 + n[$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

   (b) On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme,se trouve dans l'intervalle $]230\ ;\ m[$. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.