Rappels sur la loi binomiale

Table des matières

I Schéma de Bernoulli 1
II Coefficients binomiaux 2
III Loi binomiale 3

I Schéma de Bernoulli

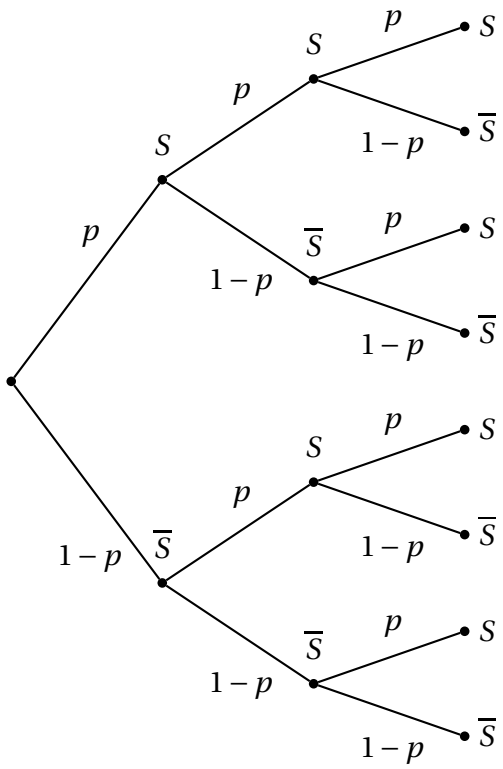
Définition

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à deux issues, appelées en général succès et échec.
Si p est la probabilité d'un succès, la probabilité d'un échec est $q = 1 - p$.

On appelle schéma de Bernoulli une répétition de n fois la mÍme épreuve de Bernoulli, les épreuves successives étant indépendantes.
Les paramètres sont n (nombre d'épreuves) et p, probabilité d'un succès

On peut représenter la situation par un arbre pondéré.

Exemple avec trois épreuves :



On a par exemple : $p\left(S \cap \overline{S} \cap S\right) = p(1-p)p = p^2(1-p)$

II Coefficients binomiaux

Propriété

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
On appelle coefficient binomial $\binom{n}{k}$, ou combinaison de k parmi n, le nombre de chemins conduisant à k succès sur l'arbre représentant n expériences successives.

Remarque : $\binom{n}{k}$ compte le nombre de positions possibles des k succès parmi les n positions possibles de S et $\overline{S}$.

Propriété

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
Alors :

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Justification :

- $\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant 0 succès.
- $\binom{n}{n} = 1$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant n succès.
- $\binom{n}{1} = n$ car il y a n chemins réalisant 1 succès, correspondant aux n emplacements possibles de ce succès.
- $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ car compter le nombre dfe chemins menant à $n-k$ succès revient à compter le nombre de chemins menant à k échecs.

Remarque :On peut calculer les coefficients binomiaux essentiellement de deux façons différentes :

- à l'aide de la calculatrice.
- à l'aide du triangle de Pascal (voir ci-dessous)
- avec la formule directe (hors-programme) : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$ où $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ (se lit « factorielle n »)

Propriété

Soit un schéma de Bernoulli correspondant à des paramètres n et p.
Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Démonstration :

Les chemins comportant $n+1$ succès parmi les $n+1$ épreuvesn au nombre de $\binom{n+1}{k+1}$, sont de deux sortes :

- ceux commençant par un échec : il y en a $\binom{n}{k+1}$ (car les $k+1$ succès sont dans les n épreuves autres que la première)
- ceux commençant par un succès : il y en a $\binom{n}{k}$ car ayant commencé par un succès, il n'en reste plus que k à chercher parmi les n épreuves autres que la première.

On peut alors calculer les coefficients binomiaux de proche en proche, par exemple avec le triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

III Loi binomiale

Définition

Soit une expérience aléatoire associée à un schéma de Bernoulli.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès.
La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Propriété

Soit X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$. (on peut écrire $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;\,p)$)

Pour tout $k \leqslant n$, $p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Chaque chemin, comportant k succès et donc $n-k$ échecs, a une probabilité égale à $p^k(1-p)^{n-k}$.

Il y a $\binom{n}{k}$ tels chemins d'où le résultat.

Propriétés (admises)

- $E(X) = np$ (expérance)
- $V(X) = npq$ (variance) où $q = 1-p$
- $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ (écart-type).