Feuille d'exercices les probabilités (2)

I

La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race Française Frisonne Pis Noir peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6000$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

La fonction f désigne la fonction de densité de cette loi normale.

1. Afin de gérer au mieux son quota laitier, en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite disposer de certaines probabilités. .
   (a) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5 800 litres de lait par an.
   (b) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5 900 et 6 100 litres de lait par an.
   (c) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6 250 litres de lait par an.
2. Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître les deux valeurs suivantes : aidez-le !
   (a) la production maximale prévisible des 30 % de vaches les moins productives du troupeau.
   (b) la production minimale prévisible des 20 % de vaches les plus productives du troupeau.

II Réglage d'une machine d'embouteillage dans une coopérative

Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en cL) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cL peut être modélisé par une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 2$.

La législation impose qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles contenant moins d'un litre.

1. À quelle valeur de la moyenne doit on régler la machine pour respecter cette législation ?
2. La contenance des bouteilles étant de 110 cL, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?
3. Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1 % de bouteilles qui débordent, au risque de ne plus suivre la législation.
   (a) Quelle est alors la valeur de μ ?
   (b) Quelle est dans les conditions de la question a) la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre ?
   (c) Déterminer μ et σ afin qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles de moins de 1 litre et moins de1 % de bouteilles qui débordent.

III Antilles-Guyane septembre 2013

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et Y la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 36$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,2$ et que Y suit la loi normale de moyenne $\mu_2 = 6$ et d'écart-type $\sigma_2 = 0,05$.

1. Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1 - 3\sigma_1$ et $\mu_1 + 3\sigma_1$. Quelle est une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité p_1 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur ?
2. Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre 5,88 mm et 6,12 mm. Le tableau donné ci-dessous a été obtenu à l'aide d'un tableur. Il indique pour chacune des valeurs de k, la probabilité que Y soit inférieure ou égal à cette valeur.
   Déterminer à 10^{-3} près la probabilité p_2 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre (on pourra s'aider du tableau ci-contre)

k	$p(Y \leqslant k)$
5,8	3,16712E − 05
5,82	0,000159109
5,84	0,000687138
5,86	0,00255513
5,88	0,008197536
5,9	0,022750132
5,92	0,054799292
5,94	0,11506967
5,96	0,211855399
5,98	0,344578258
6	0,5
6,02	0,655421742
6,04	0,788144601
6,06	0,88493033
6,08	0,945200708
6,1	0,977249868
6,12	0,991802464
6,14	0,99744487
6,16	0,999312862
6,18	0,999840891
6,2	0,999968329

3. On prélève une pièce au hasard. On appelle L l'évènement « la pièce est conforme pour la longueur » et D l'évènement « la pièce est conforme pour le diamètre ». On suppose que les évènements L et D sont indépendants.
   (a) Une pièce est accepté si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.
   Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevé au hasard ne soit pas accepté (le résultat sera arrondi à 10^{-2}).
   (b) Justifier que la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur, est égale à p_2.

IV D'après Centres étrangers juin 2003

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.
Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de duré de vie sans vieillissement.
On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par :

$$p(D \leqslant A) = \int_0^A \frac{1}{82}\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x.$$

Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
   (a) comprise entre 50 et 100 km ;
   (b) supérieure à 300 km.
2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire D et donner une interprétation de ce résultat.
4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de mêême loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.
   d étant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.
   (a) Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $\mathrm{e}^{-\lambda d}$.
   (b) Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.
5. La desserte de villages par un circuit de 76 km est effectuée pendant 210 jours par des autocars de cette entreprise de telle sorte que les dessertes journalières sont indépendantes et la survenue d'un incident a chaque jour une probabilité $q = 1 - \mathrm{e}^{\frac{76}{82}}$.
   On appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'incidents dans l'année pour ce circuit.
   (a) Calculer $E(Y)$ et $\sigma^2(Y = V(Y))$.
   (b) les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ sont-elles remplies ?
   (c) Détermioner la probabilité d'avoir moins de 120 incidents dans l'année pour la desserte ces villages.