TS : feuille de révisions (12 juin 2014)

I

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = n^2$.

II Amérique du Nord mai 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   (a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

   (b) Que permet de calculer cet algorithme ?

   (c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6
n	15	20	
Valeur affichée	1,999 9	1,999 9	

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

   (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

   (d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1{,}999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

III Polynésie juin 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.

   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

   (b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

IV Nouvelle Calédonie mars 2012

VRAI ou FAUX ?

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1. **Énoncé 1 :** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante de réels.

   Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.

   Proposition 1 : « *On peut choisir la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\frac{\sqrt{2}}{2}$. »

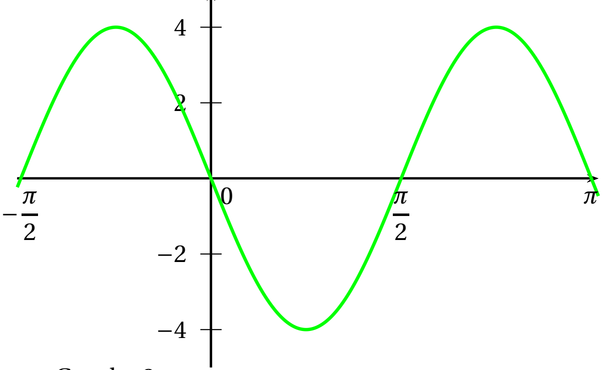
2. **Énoncé 2 :** Dans le plan complexe d'origine O, on considère, pour tout entier naturel non nul n, les points M_n d'affixe $z_n = \mathrm{e}^{\frac{2in\pi}{3}}$.

   Proposition 2 : « *Les points* O, M_1 *et* M_{20} *sont alignés.* »

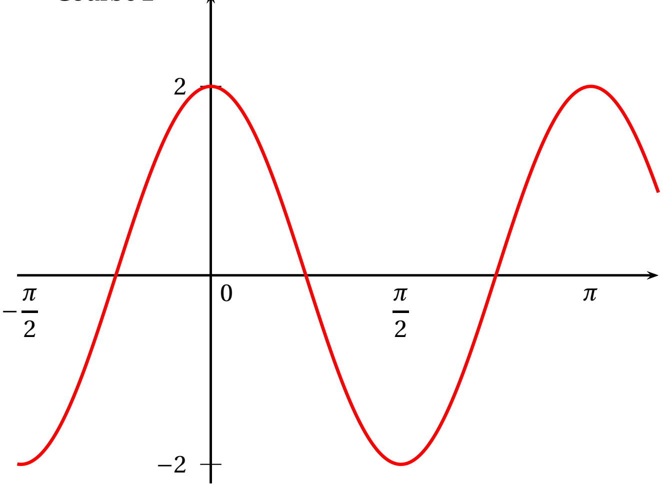
3. **Énoncé 3 :** On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.

   Proposition 3 : « *La courbe* 3 *ci-dessous est la représentation graphique de* f ».

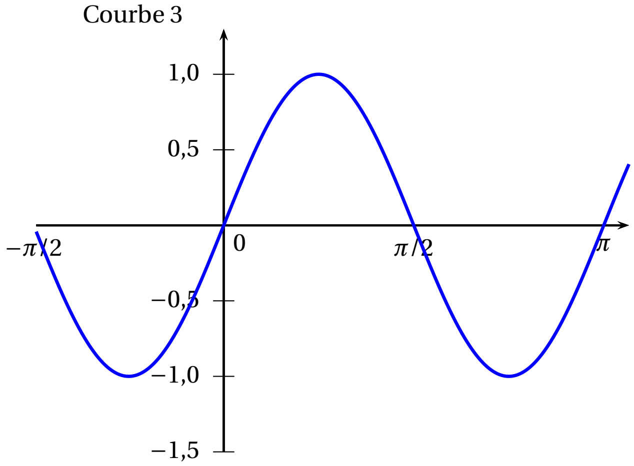
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



4. **Énoncé 4 :** On considère, dans un repère orthonormé de l'espace, le point A(0 ; 0 ; 3) et le plan P d'équation $2x - y + z = 0$.

   Proposition 4 : *« La sphère de centre* A *et de rayon* 2 *et le plan* P *sont sécants. »*

V Amérique du Nord mai 2012

Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

(a) Soit g la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.

   Montrer que la fonction g est positive sur $[1\ ;\ +\infty[$.

(b) i. Montrer que, pour tout x de $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   ii. En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

   iii. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   iv. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

(c) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

   i. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

   ii. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

VI Asie juin 2012

(a) On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictemenl positif non nul b $(b > a)$ Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANTQUE $n < N$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

(b) i. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

ii. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.

(c) i. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

ii. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

(d) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

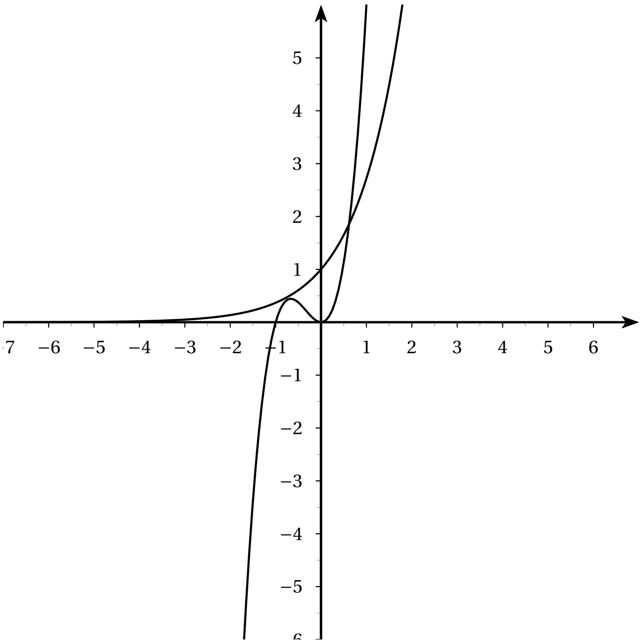
VII Centres étrangers juin 2012

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle :

$$\mathrm{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$$

PARTIE A : conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

PARTIE B : étude de la validité de la conjecture graphique

(a) i. Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.

ii. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.

iii. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).

(b) On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel x de $]-1\,;,\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x.$$

Montrer que, sur $]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $h(x) = 0$.

(c) i. Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à $]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$$

ii. Déterminer les variations de la fonction h.

iii. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

(d) Conclure quant à la conjecture de la **partie A**.