TS : feuille d'exercices n° 1

I

La suite (v_n) est telle que $v_0 = 1$ et, pour tout n, $v_{n+1} = 3v_n - 1$.
Calculer v_2. Exprimer v_{n+2} en fonction de v_n.

II

(u_n) est la suite de terme général $u_n = \dfrac{n}{n^2+4}$.
Exprimer u_{n+1}, $u_n + 1$, u_{2n}, u_{n+2} et $u_n + 2$ en fonction de n.

III

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2+3}$; calculer u_4.
2. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Calculer u_4.

IV

Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{5x+4}$ une fonction.

1. Sur quel ensemble est définie cette fonction ?
2. Étudier les variations de cette fonction.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{2n+3}{5n+4}$.
   Que peut-on dire des variations de cette suite ?

V

1. (u_n) est une suite arithmétique.
   On sait que $u_4 = 13$ et $u_8 = 29$.
   Calculer u_0 et la raison de cette suite ; en déduire la valeur de u_{20}.
2. (u_n) est une suite géométrique.
   On sait que $u_2 = 18$ et $u_8 = 13\,122$.
   Calculer u_0 et la raison de cette suite ; en déduire la valeur de u_{20}.

Correction

I

La suite (v_n) est telle que $v_0 = 1$ et, pour tout n, $v_{n+1} = 3v_n - 1$.
$v_1 = 3v_0 - 1 = 3\times 1 - 1 = \boxed{2}$ et $v_2 = 3v_1 - 1 = 3\times 2 - 1 = \boxed{5}$.
$v_{n+2} = 3v_{n+1} - 1 = 3(3v_n - 1) - 1 = \boxed{9v_n - 4}$

II

(u_n) est la suite de terme général $u_n = \dfrac{n}{n^2+4}$.

- $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{(n+1)^2+4} = \boxed{\dfrac{n+1}{n^2+2n+5}}$.
- $u_n + 1 = \dfrac{n}{n^2+4} + 1 = \dfrac{n+n^2+4}{n^2+4} = \boxed{\dfrac{n^2+n+4}{n^2+4}}$.
- $u_{2n} = \dfrac{2n}{(2n)^2+4} = \dfrac{2n}{4n^2+4} = \boxed{\dfrac{n}{2\left(n^2+1\right)}}$.
- $u_{n+2} = \dfrac{n+2}{(n+2)^2+4} = \boxed{\dfrac{n+2}{n^2+4n+8}}$
- $u_n + 2 = \dfrac{n}{n^2+4} + 2 = \boxed{\dfrac{2n^2+n+8}{n^2+4}}$

III

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2+3}$.
   $u_4 = \dfrac{1}{4^2+3} = \boxed{\dfrac{1}{19}}$.
2. Soit (u_n) la suite définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
   La suite est définie **par récurrence** ; il faut calculer les termes successifs :
   $u_1 = u_{0+1)} = 2u_0 + 0 + 3 = 5.$
   $u_2 = 2u_1 + 1 + 3 = 14.$
   $u_3 = 2u_2 + 2 + 3 = 33.$
   $u_4 = 2u_3 + 3 + 3 = 72.$

IV

1. f est définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$.
2. $f'(x) = -\dfrac{7}{(4x+5)^2} < 0$ sur $\mathscr{D}_f$.
3. $u_n = f(n)$. $\mathbb{N}$ est inclus dans l'intervalle $\left]-\dfrac{4}{5\,;\,=\infty}\right[$; f est décroissante sur cet intervalle, donc la suite (u_n) est décroissante.

V

1. (u_n) est une suite arithmétique.
   On sait que $u_4 = 13$ et $u_8 = 29$.
   $u_8 - u_4 = 4r$ donc $\boxed{r = 4}$.
   $u_4 = u_0 + 4r$ donc $u_0 = u_4 - 4r = \boxed{-3}$.

   $u_{20} = u_8 + 12r = 29 + 48 = \boxed{77}$.
2. (u_n) est une suite géométrique.
   On sait que $u_2 = 18$ et $u_8 = 13\,122$.
   $\dfrac{u_8}{u_2} = q^6 = \dfrac{13122}{18} = 729$ d'où $\boxed{q = 3}$.

   On en déduit $u_2 = u_0 q^2$ donc $u_0 = \dfrac{u_2}{q^2} = \boxed{2}$.

   On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \boxed{2\times 3^n}$.
   $u_{20} = u_0 \times q^{20} = 2\times 3^{20} = \boxed{6\,973\,568\,802}$.