Exercices de bac sur les probabilités conditionnelles

I Métropole-Réunion septembre 2009

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.

Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
   (a) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
   (b) Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.
2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.
   Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.

II Nouvelle-Calédonie novembre 2009

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.

Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

— T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »

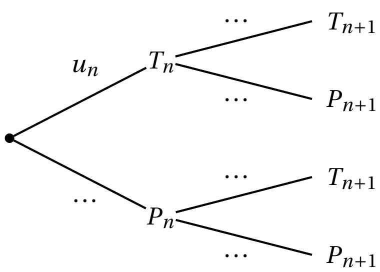
— P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. (a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.
   (b) Montrer que $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.
   (c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



   (d) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $$u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2.$$
   (e) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :
   $$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?

III La Réunion jun 2010

Partie I :

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2. Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $\dfrac{7}{18}$.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II :

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1. (a) Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\dfrac{4}{9}$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?