Exercices de démonstration par récurrence

I

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2 \times u_n – 3$.
Démontrons par récurrence que pour tout entier n, $P(n)$: $u_n = 2^{n+2} + 3$.

II

Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)[2n+1]}{6}$.

III

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$.

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = n^2$.

IV

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.