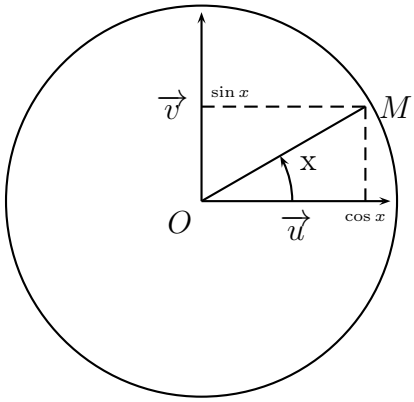
Rappels de trigonométrie

Notions élémentaires

M a pour coordonnées : $M\,(\cos x\ ;\ \sin x)$
$\cos x = x_M \in [-1\ ;\ 1]$
$\sin x = y_M \in [-1\ ;\ 1]$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$



On oriente le cercle trigonométrique , en tournant dans le sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre.

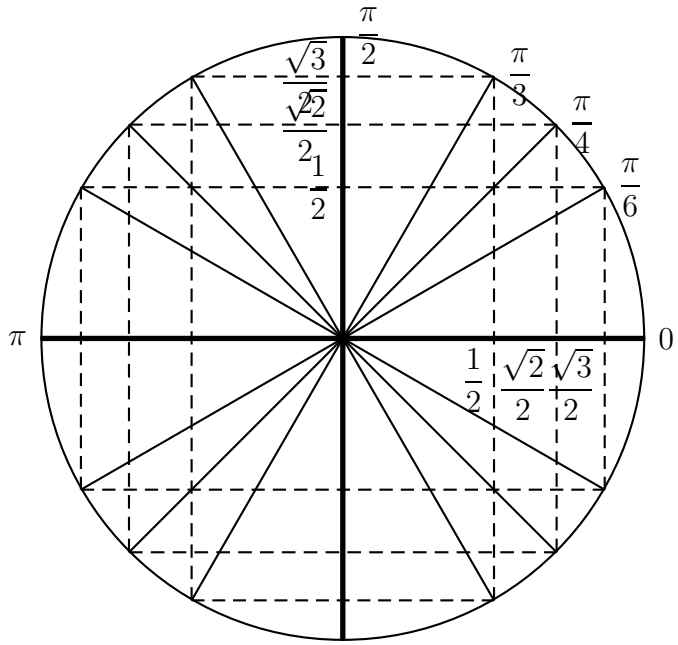
Valeurs remarquables

x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Les valeurs pour les angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$ s'obtiennent facilement à l'aide de calculs trigonométriques dans un triangle équilatéral coupé par une hauteur pour avoir un triangle rectangle et un triangle rectangle isocèle.

Il faut savoir placer les angles sur un cercle trigonométrique. On a notamment $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ donc on trace les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$.
On trace alors la droite passant par l'origine O et l'intersection de ces deux droites, qui correspond à la bissectrice, correspondant à l'angle $\frac{\pi}{4}$

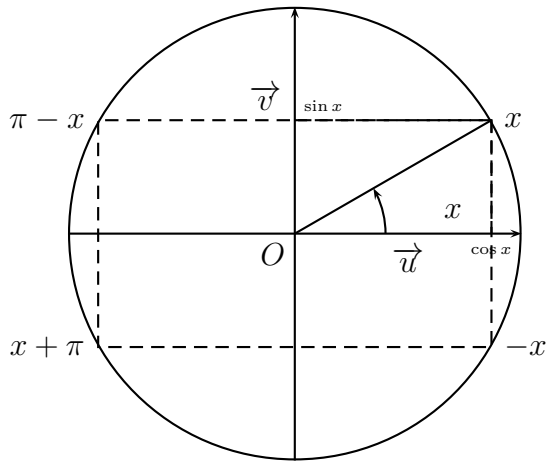
Cercle trigonométrique



Configuration du rectangle

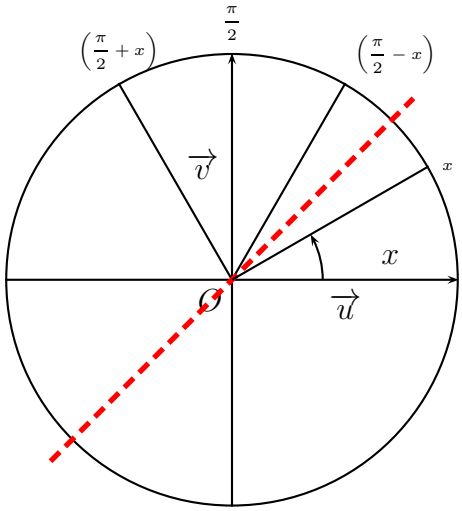
Soit x un réel. Les points correspondant aux angles x, $\pi - x$, $\pi + x$ et x forment un rectangle. En utilisant les symétries par rapport aux deux axes, on trouve :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{array}}$$



Configuration des angles complémentaires

Deux angles sont complémentaires si leur somme vaut $\frac{\pi}{2}$. L'angle complémentaire de x est $\frac{\pi}{2} - x$.
Les points correspondants du cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à la première bissectrice, d'équation $y = x$, qui transforme un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ en un point de coordonnées $(y\ ;\ x)$.



On en déduit :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x\end{aligned}}$$

Angle augmenté de $\frac{\pi}{2}$

En utilisant les formules ci-dessus et en effectuant une symétrie par rapport à l'axe imaginaire, on trouve :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x\\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x\end{aligned}}$$

Formules d'addition

On a :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\\ \sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a\sin b\end{aligned}}$$

En prenant $-b$ à la place de b, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b\end{aligned}}$$

En prenant $a = b$, on trouve les formules de duplication :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a\\ \sin(2a) &= 2\sin a\cos a\end{aligned}}$$

Pour $\cos(2a)$, on utilise $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

Formules de linéarisation

Les formules de duplication donnent :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos^2 a &= \frac{1+\cos(2a)}{2}\\ \sin^2 a &= \frac{1-\cos(2a)}{2}\end{aligned}}$$