Correction de la feuille (2)

I

Pour tout n, $u_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$.

u_n est donc la somme des n premiers nombres impairs.

Soit P_n la proposition : pour tout $n \geqslant 1$, « $u_n = n^2$ ».

Démontrons P_n par récurrence :

- **Initialisation :** pour $n=1$, $n^2 = 1^2$ et $u_1 = 1$ donc $u_1 = 1^2$.
- **Hérédité :** on suppose la propriété P_n vraie pour un entier n quelconque.
  Par conséquent : $u_n = n^2$.
  Alors : $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = u_n + (2\times(n+1)-1) = u_n + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ (identité remarquable).
  La propriété est vraie au rang $+1$.
  Elle est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

II Amérique du Nord mai 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   (a) On a : $u_0 = \boxed{1}$, $u_1 = \sqrt{2u_0} = \boxed{\sqrt{2}}$, $u_2 = \sqrt{2u_1} = \boxed{\sqrt{2\sqrt{2}}}$ et

   $u_3 = \sqrt{2u_2} = \boxed{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = 1.8340$ à 10^{-4} près

   (b) Cet algorithme permet le calcul du terme de rang n.

   (c) D'après le tableau des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n, on peut conjecturer que la suite est **croissante** et **majorée par 2**.

2. (a) Démontrons par **récurrence** que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.
   - **Initialisation**

   On a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leqslant 2$
   - **Hérédité**

   Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0 < u_n \leqslant 2$.

   On a : $0 < u_n \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 < 2u_n \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{2u_n} \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 < u_{n+1} \leqslant 2$. (en utilisant la croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$)

- **Conclusion**

  $0 < u_0 \leqslant 2$

  Si $0 < u_n \leqslant 2$ alors $0 < u_{n+1} \leqslant 2$.

  D'après l'axiome de récurrence on a pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

(b) Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).

Comme pour tout entier naturel n, $0 < u_n$, comparons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{2u_n}}{u_n} = \sqrt{\dfrac{2u_n}{u_n^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{u_n}}$.

Comme on a démontré précédemment que $u_n \leqslant 2$, alors $\dfrac{2}{u_n} \geqslant 1$ et $\sqrt{\dfrac{2}{u_n}} \geqslant 1$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$; (u_n) est une suite **croissante**.

(c) On vient de prouver que, d'une part la suite (u_n) est strictement croissante et que d'autre part, elle est majorée par 2.

Ceci démontre que la suite (u_n) est **convergente**.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

(a) Pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$ donc en particulier :

$u_0 = \ln(u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

On a aussi pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$, mais $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Alors : $v_{n+1} = \ln\sqrt{2u_n} - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) + \ln 2) - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln 2) = \boxed{\dfrac{1}{2}v_n}$

On peut en conclure que la suite (v_n) est la suite **géométrique** de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

(b) On déduit de ce qui précède que pour tout entier naturel n, $v_n = \boxed{-\ln 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

$v_n = \ln(u_n) - \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right) = v_n \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{2} = e^{v_n} \Leftrightarrow \boxed{u_n = 2e^{v_n}}$. u_n en fonction de n.

(c) Comme $\dfrac{1}{2} \in [0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x\right) = 1$, alors par composition des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{v_n}\right) = 1$ et finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \boxed{2}$

(d) L'algorithme ci-dessous permet d' afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leqslant 1,999$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie :	Afficher n

III Polynésie juin 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. (a) $u_1=\dfrac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\boxed{\dfrac{3}{4}}$.

   $u_2=\dfrac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}}=\boxed{\dfrac{9}{10}}$

   (b) Démontrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0<u_n$.

   - **Initialisation** : $u_0=\dfrac{1}{2}>0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** : supposons la propriété vraie à un rang n quelconque.
     Alors $u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{1+2u_n}>0$ puisque $u_n>0$; la propriété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. On **admet** que, pour tout entier naturel n, $u_n<1$.

   (a) Pour tout n, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n}{1+2u_n}-u_n=\dfrac{2u_n-2u_n^2}{1+2u_n}=\boxed{\dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}>0}$ car $u_n>0$ et $1-u_n>0$ puisque $u_n<1$.
   Le suite (u_n) est donc **croisante**.

   (b) La suite (u_n) est croissante majorée par 1, donc elle **converge** vers une limite ℓ avec $\ell\leqslant 1$.

3. Soit(v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=\dfrac{u_n}{1-u_n}$.

   (a) Pour tout n, $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}=\dfrac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}}=\dfrac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}}=\dfrac{3u_n}{1+2u_n}\times\dfrac{1+2u_n}{1-u_n}=3\times\dfrac{u_n}{1-u_n}$
   $=\boxed{3v_n}$.
   Pour tout n, $v_{n+1}3v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique, de raison 3 et de premier terme $v_0=\dfrac{u_0}{1-u_0}=1$

   (b) Puisque (vn) est **géométrique** de raion 3, on en déduit $v_n=v_0\times 3^n=3^n$.

   (c) $v_n=\dfrac{u_n}{1-u_n}\Leftrightarrow v_n-u_nv_n=u_n\Leftrightarrow v_n=u_nv_n+u_n\Leftrightarrow v_n=u_n(1+uv_n)\Leftrightarrow u_n=\dfrac{v_n}{1+v_n}=\boxed{\dfrac{3^n}{1+3^n}}$

   (d) $v_n=\dfrac{3^n}{3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{3^n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.
   La suite (u_n) **converge vers 1.**

IV Nouvelle Calédonie mars 2012

1. **Énoncé 1 :**
   VRAI : exemple $a_n=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2^n}$.

2. **Énoncé 2 :**
   FAUX : on a $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ qui a pour argument $\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{3}$ et $z_{20} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\times 20\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{40\mathrm{i}\pi}{3}}$. Or $\dfrac{40\pi}{3} = \dfrac{36\pi + 4\pi}{3} = 12\pi + \dfrac{4\pi}{3}$, donc z_{20} a pour argument $\dfrac{4\pi}{3} \neq \dfrac{2\pi}{3}$. Donc les points O, M_1 et M_{20} ne sont pas alignés.
3. **Énoncé 3 :**
   Proposition 3 :
   FAUX : si la courbe 3 est la représentation graphique de f, la courbe 1 est celle de F puisque c'est la seule qui contient l'origine ($F(0) = 0$).
   Or on voit sur la courbe 1 que $F'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, mais $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$. Donc la courbe 1 n'est pas la représentation graphique de la primitive F.
4. **Énoncé 4 :**
   Proposition 4 : **Ce n'est plus au programme de 2013**

   Calculons la distance de A au plan P :
   $d(\mathrm{A}\ ;\ \mathrm{P}) = \dfrac{|3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \approx 1{,}225.$
   La distance est inférieure au rayon du cercle : la réponse est VRAI.

V Amérique du Nord mai 2012

Partie A : Restitution organisée des connaissances

On effectue un changement de variable, en possant $X = \ln(x)$; alors $x = \mathrm{e}^X$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, X tend aussi vers $+\infty$.
Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}} = 0$ d'après le rappel.

Partie B

1. Soit g la fonction définie sur $[1\ ;\ =\infty[]$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
   g est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[]$ comme somme de fonctions dérivables.
   Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $\boxed{g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0}$ (somme de nombres positifs).
   g est donc **croissante** sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   $g(1) = 0$.
   Le tableau de variation de g est donc :

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	0 $\nearrow$

   Le minimum de g est 0, donc $g(x)$ est **positif** pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$.
2. (a) f est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 1 - \left[\dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2}\right] = 1 - \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}}$.

(b) Comme $x^2>0$ sur $[1\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, donc positif sur $[1\,;\,+\infty[$ avec $f'(1)=0$.

(c) Pour tout $x\in[1\,;\,+\infty[$, $f(x)-x=-\dfrac{\ln(x)}{x}$.

D'après la partie A, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$.
La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$ est donc asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

(d) Pour tout $x\in[1\,;\,+\infty[$, $f(x)-x=\boxed{-\dfrac{\ln(x)}{x}<0}$ car $\ln(x)\geqslant 0$ et $x>0$.

La courbe $\mathscr{C}$ est donc **en dessous** de son asymptote $\mathscr{D}$ (avec intersection en $x=1$).

3. (a) On a donc $M_kN_k=y_{N_k}-y_{M_k}=\boxed{\dfrac{\ln(k)}{k}}$.

(b) L'algorithme est :

```
VARIABLES
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  k PREND_LA_VALEUR 2
  TANT_QUE (ln(k)/k>0.01) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    k PREND_LA_VALEUR k+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER k
FIN_ALGORITHME
```

VI Asie juin 2012

1.

n	u	v	a	b
0	4	9	4	9
1	6,5	6,964	6,5	6,964
2	6,732	6,736	6,732	6,736

2. (a) Initialisation

Pour $n=0$, on a bien $u_0>0$ et $v_0>0$. L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Supposons que pour $n\in\mathbb{N}$: $u_n>0$ et $v_n>0$. Alors :

$$u_n+v_n>0\Rightarrow\frac{u_n+v_n}{2}>0\Rightarrow\boxed{u_{n+1}>0}$$

$$u_n^2>0\text{ et }v_n^2>0\Rightarrow u_n^2+v_n^2>0\Rightarrow\frac{u_n^2+v_n^2}{2}>0\Rightarrow\sqrt{\frac{u_n^2+v_n^2}{2}}>0\Rightarrow\boxed{v_{n+1}>0}$$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang $n+1$.
Ainsi, d'après l'axiome de récurrence, on en déduit que : $\boxed{u_n>0\text{ et }v_n>0\text{ pour tout }n\in\mathbb{N}}$.

(b) $$v_{n+1}^2-u_{n+1}^2=\frac{u_n^2+v_n^2}{2}-\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^2=\frac{2u_n^2+2v_n^2}{4}-\frac{u_n^2+2u_nv_n+v_n^2}{4}=\frac{u_n^2-2u_nv_n+v_n^2}{4}=$$

$$\boxed{\left(\frac{u_n-v_n}{2}\right)^2=v_{n+1}^2-u_{n+1}^2}.$$

D'oô, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}^2-u_{n+1}^2\geqslant 0\Rightarrow v_{n+1}^2\geqslant u_{n+1}^2\Rightarrow v_{n+1}\geqslant u_{n+1}\Rightarrow v_n\geqslant u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Par construction, $v_0\geqslant u_0$.

Conclusion : $\boxed{v_n\geqslant u_n\text{ pour tout }n\in\mathbb{N}}$.

3. (a) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-u_n=\dfrac{v_n-u_n}{2}\geqslant 0$ d'après la question précédente.
$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante}}$.

(b) $0<u_n\leqslant v_n \Rightarrow u_n^2\leqslant v_n^2 \Rightarrow u_n^2+v_n^2\leqslant v_n^2+v_n^2 \Rightarrow \dfrac{u_n^2+v_n^2}{2}\leqslant v_n^2 \Rightarrow \boxed{v_{n+1}^2\leqslant v_n^2} \Rightarrow v_{n+1}\leqslant v_n$ (car les éléments de la suite v_n sont positifs).
$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc décroissante}}$.

4. On a montré que :
- la suite u_n est croissante donc $u_0\leqslant u_n$ pour tout entier naturel n,
- la suite v_n est décroissante donc $v_n\leqslant v_0$ pour tout entier naturel n,
- pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant v_n$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_0\leqslant u_n\leqslant v_n\leqslant v_0$ d'oô en particulier $\left\{\begin{array}{lll} u_n & \leqslant & v_0\\ v_n & \leqslant & u_0\end{array}\right.$

La suite (u_n) est croissante majorée par v_0 donc, d'après théorème, elle est convergente.

La suite (v_n) est décroissante minorée par u_0 donc, d'après théorème, elle est convergente.

VII Centres étrangers juin 2012

Partie A : Conjecture graphique

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Il semble y en avoir 2. L'une comprise entre -1 et 0, l'autre entre 0 et 1.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. (a) $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+x^3=x^2(1+x)$. Comme un carré est positif ou nul, x^2+x^3 est du signe de $1+x$.
- $x^2+x^3=0$ pour $x\in\{-1\ ;\ 0\}$.
- $x^2+x^3>0$ pour $x\in]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$.
- $x^2+x^3<0$ pour $x\in]\infty\ ;\ -1[$.

(b) x solution de $(E)\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=3\left(x^2+x^3\right)\Leftrightarrow x^2+x^3=\dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$. Or, pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{3}>0$, alors que $x^2+x^3<0$ pour $x\in]\infty\ ;\ -1[$. (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.

(c) $\mathrm{e}^x=1$ et $3\times(0^2+0^3)=0$. Donc 0 n'est pas solution de (E).

2. $\forall x\in]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, (E)
$$\begin{array}{lll}
\Leftrightarrow & \mathrm{e}^x=3\left(x^2+x^3\right) & \\
\Leftrightarrow & \ln\mathrm{e}^x=\ln\left(3\left(x^2+x^3\right)\right) & a=b\Leftrightarrow \ln a=\ln b\\
\Leftrightarrow & x=\ln 3+\ln\left(x^2(1+x)\right) & \ln(ab)=\ln a+\ln b\\
\Leftrightarrow & x=\ln 3+\ln\left(x^2\right)+\ln(1+x) & \\
\Leftrightarrow & \ln 3+\ln\left(x^2\right)+\ln(1+x)-x=0 & \\
\Leftrightarrow & h(x)=0 &
\end{array}$$

3. (a) h est une somme et composée de fonctions de référence dérivables, donc h est bien dérivable sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$.

Si $u>0$ sur un intervalle, alors $\ln u$ est dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est $\dfrac{u'}{u}$.

Pour tout réel $x\in]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, $h'(x)=0+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{2(x+1)+x-x(x+1)}{x(x+1)}$

On a bien : $h'(x)=\dfrac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}$.

(b) Pour étudier le sens de variations de h, on étudie le signe de sa dérivée.
Les numérateurs et dénominateurs sont des trinômes du second degré.

Pour le dénominateur, les racines sont 0 et -1, le coefficient dominant est $1>0$. Il est donc positif « à l'extérieur » des racines, négatif « entre » les racines (voir le tableau).
Pour le numérateur, pas de racine évidente. On calcule donc le discriminant. On trouve : $\Delta = 12 > 0$ et les deux racines sont $x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1-\sqrt{3}$ et $x_2 = 1+\sqrt{3}$. Le coefficient dominant est $-1>0$, d'oô le signe...
Étude des limites aux bornes :

— Limite en -1

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1} \ln 3 - x = \ln 3 - 1 \\ \left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to -1} x^2 & = & 1 \\ \lim\limits_{X\to 1} \ln X & = & 0 \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to -1} \ln x^2 = 0 \\ \left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to -1} 1+x & = & 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \ln X & = & -\infty \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to -1} \ln(1+x) = -\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to -1} h(x) = 0$$

— Limite en 0

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \ln 3 - x = \ln 3 \\ \left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0} x^2 & = & 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \ln X & = & -\infty \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0} \ln x^2 = -\infty \\ \left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0} 1+x & = & 1 \\ \lim\limits_{X\to 1} \ln X & = & 0 \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$$

— Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \ln 3 - x = -\infty \\ \left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to +\infty} \ln X & = & +\infty \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x^2 = +\infty \\ \left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to +\infty} 1+x & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to +\infty} \ln X & = & +\infty \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \text{on a la F.I. "}{+\infty}{-}\infty\text{"}$$

$h(x) = \ln 3 + (x+1)\left(\dfrac{2\ln x}{x+1} + \dfrac{\ln(1+x)}{x+1} - \dfrac{x}{x+1}\right)$.

Or

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = 1$

— $\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to +\infty} 1+x & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} & = & 0 \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x+1} = 0$

— Pour tout $x > 1, 0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x+1} < \dfrac{\ln x}{x}$. Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+1} = 0$
Finalement avec des opérations élémentaires, on obtient enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.
Pour avoir le tableau de variations complet, il nous faut encore les signes de $h\left(1-\sqrt{3}\right) < 0$ et $h(1+\sqrt{3}) > 0$ que l'on obtient avec la calculatrice.

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+2x+2$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x(x+1)$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$h'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	≈ -0.11	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$\approx 1,7$	$\searrow$	$-\infty$

(c) — Sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$, la dérivée s'annule en changeant de signe $(+;-)$, donc $h(1-\sqrt{3})$ est un maximum pour h sur cet intervalle. Or $h(1-\sqrt{3}) < 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-1\,;\,0[$. C'est une première contradiction avec la conjecture de la partie A.

— Sur l'intervalle $]0\,;\,1+\sqrt{3}[$ la fonction h est dérivable, donc continue ; 0 est compris entre $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet donc au moins une solution sur $\left[0\,;\,1+\sqrt{3}\right[$. Comme h est strictement monotone sur cet intervalle, cette solution α_1 est unique.
La calculatrice donne : $h(0,61) \approx -0,02$ et $h(0,62) \approx 0,24$.
0 est donc compris entre $h(0,61)$ et $h(0,62)$, le raisonnement précédent assure donc que $\alpha_1 \in [0,61\,;\,0,62]$.
Une valeur approchée de α_1, arrondie au centième est donc par exemple $0,61$.

— Comme $h(1+\sqrt{3}) > 0$, 0 est aussi compris entre $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right)$. Le même raisonnement assure donc l'existence d'une autre solution dans cet intervalle. Voir le tableau.
Avec la calculatrice, on trouve $7,11$ comme valeur approchée de α_2, arrondie au centième.

(d) La conjecture de la partie A est erronée. Il y a bien deux solutions mais pas dans les intervalles prévus !