TS1-TS2-TS3 : correction du contrôle commun n° 1 (3 heures)

I (0,5 point)

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4n + 6 \end{cases}$.

On remarque que le terme n, indice de u_n est le même que dans $-4n+6$.

On a :

- $u_1 = 3u_0 - 4\times 0 + 6 = 6 - 0 + 6 = 12$
- $u_2 = 3u_1 - 4\times 1 + 6 = 3\times 12 - 4 + 6 = 38$
- $u_3 = 3u_3 - 4\times 2 + 6 = 114 - 8 + 6 = 112$
- $u_4 = 3u_3 - 4\times 3 + 6 = 336 - 12 + 6 = \boxed{330}$

II (1,5 point)

1. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = n^2 - 9n + 20$.
   $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 9x + 20$; $f'(x) = 2x - 9$.
   $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \leqslant \dfrac{9}{2}$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant \dfrac{9}{2}$.
   La fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{9}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{9}{2}\,;\,+\infty\right[$.
   On en déduit que la suite (u_n) est **décroissante** pour $n \leqslant 4$ et **croissante** à partir de $n = 5$. (on remarque que $u_4 = u_5$.

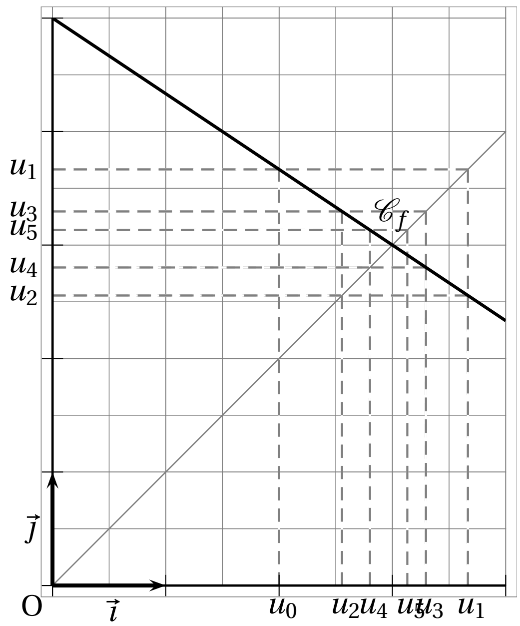
   Autre façon : pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 2n - 8 = 2(n-4)$ après simplification, qui est négatif pour $n < 4$, nul pour $n = 4$ et strictement positif pour $n \geqslant 5$.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
   $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ $(x \neq -1)$.
   Sur $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ donc la fonction f est croissante ; on en déduit que la suite associée (u_n) est **croissante**.

   Autre méthode : pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2))} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.
3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} = u_n + u_n^2 + 1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 > 0$ donc la suite (u_n) est **croissante**.

III (1 point)

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n + 5 \end{cases}$.

1. $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto -\dfrac{2}{3}x + 5$.
2. La courbe représentative de la fonction f est donnée dans le repère ci-dessous.
   Représenter graphiquement sur le graphique les cinq premiers termes de la suite.



IV (2 points)

Calculer les sommes suivantes :

1. $U = 3 + 5 + 7 + \cdots + 99$.
   C'est la somme de termes **consécutifs** d'une suite **arithmétique**, de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$.
   $99 = u_n = u_0 + nr = 3 + 2n$ donc $n = 48$.
   On sait alors que $U = u_0 + \cdots + u_n$
   $= (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right) = 49 \times \left(\dfrac{3+99}{2}\right) = 49 \times \dfrac{102}{2} = 49 \times 51 = \boxed{2\,499}$.
2. $1 + 1,1 + 1,1^2 + 1,1^3 + \cdots + 1,1^{19}$ est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, de raison $q = 1,1$.
   On sait que $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ donc :
   $1 + 1,1 + 1,1^2 + 1,1^3 + \cdots + 1,1^{19} = \dfrac{1,1^{20} - 1}{1,1 - 1} =$

$10\left(1,1^{20}-1\right)$.
On en déduit que $S=3000\left(1,1^{20}-1\right)\approx\boxed{17\,182}$

V (2 points)

(u_n) est une suite arithmétique, de premier terme u_0 et de raison r.
On sait que $u_1+u_7=36$ et $u_4+u_5=41$.
(u_n) est arithmétique donc, pour tout n, $u_n=u_0+nr$.
$u_1+u_7=36 \Leftrightarrow u_0+r+u_0+7r=36 \Leftrightarrow 2u_0+8r=36$.
$u_4+u_5=41 \Leftrightarrow u_0+4r+u_0+5r=41 \Leftrightarrow 2u_0+9r=41$.
On en déduit que u_0 et r sont solutions du système : $\begin{cases}2u_0+8r=36\\2u_0+9r=41\end{cases}$.
Par soustraction, on obtient $9r-8r=r=41-36=5$, donc $r=5$.
On en déduit alors que $2u_0=36-8r=36-8\times5=-4$ d'où $u_0=-2$.
On a donc $\boxed{u_0=-2}$ et $\boxed{r=5}$.

VI (5,5 points)

1. On a successivement : $V_1=\boxed{120}$;
$V_2=V_1-\frac{3}{4}V_1+120=\frac{1}{4}V_1+120=\boxed{150}$;
$V_3=V_2-\frac{3}{4}V_2+120=\frac{1}{4}V_2+120=\boxed{157,5}$
2. On trouve de même : $V_3\approx\boxed{159,31}$;
$V_4\approx\boxed{159,84}$; $V_6\approx\boxed{159,96}$.
3. Plus généralement, pour tout n, on a :
$V_{n+1}=V_n-\frac{3}{4}V_n+120=\boxed{\frac{1}{4}V_n+120}$.
4. Pour tout n, on pose : $t_n=160-V_n$.
   (a) Pour tout n : $t_{n+1}=160-V_{n+1}$
   $=160-\left(\frac{1}{4}V_n+120\right)=40-\frac{1}{4}V_n=\frac{1}{4}(160-V_n)=\boxed{\frac{1}{4}t_n}$. Donc : $\boxed{t_{n+1}=\frac{1}{4}t_n}$.
   On en déduit que la suite (t_n) est **géométrique**, de raison $q=\frac{1}{4}$ et de premier terme $t_1=160-V_1=40$.
   (b) Le terme général est alors :
   $\boxed{t_n=t_1q^{n-1}=40\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$.
   D'où : $V_n=160-t_n=\boxed{160-40\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$.
   Remarque : on verra bientôt que comme $-1<\frac{1}{4}<1$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ se rapproche de plus en plus de 0 quand n croît, donc la quantité de compost tend vers 160 Litres.

VII (3 points)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x^2-x-5}{x-2}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

1. L'ensemble de définition de f est $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$
2. $f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^2-x-5}{x-2}=0$.
Le discriminant vaut $\Delta=(-1)^2-4\times2\times(-5)=41>0$.
L'équation a deux racines réelle : $x_1=\dfrac{1-\sqrt{41}}{4}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}$
3. Pour étudier le signe de $f(x)$, on renseigne un tableau de signes :
Remarquons d'abord que $x_1<0$ et $x_2<2$ (car $41<49$ donc $\sqrt{41}<\sqrt{49}=7$ qui donne $x_2<2$).
Le trinôme $2x^2-x-5$ est du signe du coefficient de x^2, 2 donc positif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.
On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{41}}{4}$		2		$+\infty$
$2x^2-x-5$		+	0	−	0	+	‖	+	
$x-2$		−		−		−	‖	+	
$f(x)$		−	0	+	0	−	‖	+	

La courbe est donc en dessous de l'axe des abscisses pour $x\in\left]-\infty\,;\,\dfrac{1-\sqrt{41}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}\,;\,2\right[$
et au-dessus pour
$x\in\left[\dfrac{1-\sqrt{41}}{4}\,;\,\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}\right]\cup]2\,;\,+\infty[$.
4. Pour étudier les variations de f, on étudie le signe de la dérivée.
f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme quotient de fonctions dérivables.
$f=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=2x^2-x-5$ et $v(x)=x-2$;
$u'(x)=4x-1$ et $v'(x)=1$.
$f'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ donc
$f'(x)=\dfrac{(4x-1)(x-2)-\left(2x^2-x-5\right)}{(x-2)^2}$
$=\dfrac{4x^2-8x-x+2-2x^2+x+5}{(x-2)^2}=\boxed{\dfrac{2x^2-8x+7}{(x-2)^2}}$

Le dénominateur est positif, donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur.
Signe de $2x^2 - 8x + 7$:

$\Delta = 8 > 0$; les racines sont $x_3 = \dfrac{8-\sqrt{8}}{4} = \dfrac{8-2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ et $x_4 = \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$.
Ce trinôme est positif entre les racines ; il est clair que $x_3 < 2$ et $x_4 > 2$.
On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{4-\sqrt{2}}{2}$		2		$\frac{4+\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\approx 4,17$	$\searrow$	||	$\searrow$	$\approx 9,83$	$\nearrow$	

5. (a) Le coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse 0 est $\boxed{f'(0) = \dfrac{7}{4}}$.

   (b) L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est $y = f'(x)(x-a) + f(a)$, donc, ici, $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
   $f'(0) = \dfrac{7}{4}$ et $f(0) = \dfrac{5}{2}$ donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est : $\boxed{y = \dfrac{7}{4}x + \dfrac{5}{2}}$.

VIII (1,25 point)

La loi de probabilité ci-dessous donne le gain possible à une loterie sans tenir compte du prix du billet :

Gain (en €)	0	5	10	100	500
Probabilité	0,6	0,2	0,1	0,075	0,025

On appelle G la variable aléatoire égale au gain du joueur.

1. L'événement « Le joueur gagne 5 € » est noté $(G = 5)$.
   L'événement « Le joueur gagne au moins 5 € » se note $(G \geqslant 5)$.
   $p(G \geqslant 5) = 0,2 + 0,1 + 0,075 + 0,025$
   $= 1 - p(G = 0) = 1 - 0,6 = \boxed{0,4}$.
2. L'organisateur prévoit de fixer le prix du billet à 15 €.
   On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur **en tenant compte du prix du billet**.

   (a) Les valeurs pries par X sont alors -15 ; -10 ; -5 ; 85 et 485.

Gain X (en €	-15	-10	-5	85	485
Probabilité	0,6	0,2	0,1	0,075	0,025

   (b) L'espérance est $E(X) = \sum x_i p(X = x_i) = -15 \times 0,6 - 10 \times 0,2 - 5 \times 0,1 + 85 \times 0,075 + 485 \times 0,025 = -9 - 2 - 0,5 + 6,375 + 12,125 = \boxed{7 > 0}$
   Cela signifie, qu'en moyenne, sur un grand nombre de parties, le joueur gagne 7 euros par partie, donc l'organisateur va faire faillite.

IX (3,25 points)

Une entreprise possède 50 ordinateurs. La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de 0,01.
On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50 disponibles.

1. On a répétition d'épreuves identiques à deux issues donc X suit la loi binomiale, de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.
2. La probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne est $0,99^{50} \approx 0,605$.
3. E : « au moins un ordinateur est en panne » est le contraire de l'événement précédent, donc $p(E) = 1 - 9,99^{50} \approx \boxed{0,395}$.
4. On sait que $p(X = k) = \dbinom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k}$.
   On en déduit que :
   $p(X = 5) = \dbinom{50}{5} \times 0,01^5 \times 0,99^{45}$
   $= 3178140 \times 0,01^5 \times 0,99^{45} \approx \boxed{0,000\,13}$
5. (a) $p(X = 3)$ est la probabilité qu'exactement trois ordinateurs tombent en panne.
   $p(X = 3) = \dbinom{50}{3} \times 0,01^3 \times 0,99^{47} = 0,012221098 \approx \boxed{0,012}$

   (b) $p(X \leqslant 3)$ est la probabilité que moins de trois ordinateurs tombent en panne.
   $p(X \leqslant 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) \approx \boxed{0,998}$

   (c) On sait que $E(X) = np$ donc
   $E(X) = 50 \times 0,01 = 0,5$.
   En moyenne, le nombre d'ordinateurs en panne sur les cinquante est 0,5 ;.