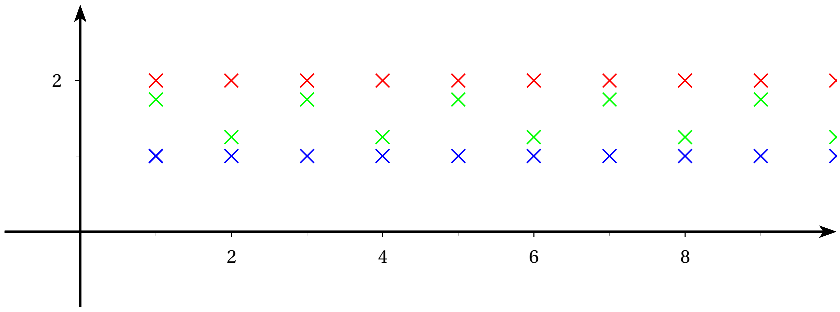
TS : correction du contrôle sur les suites et les démonstrations par récurrence

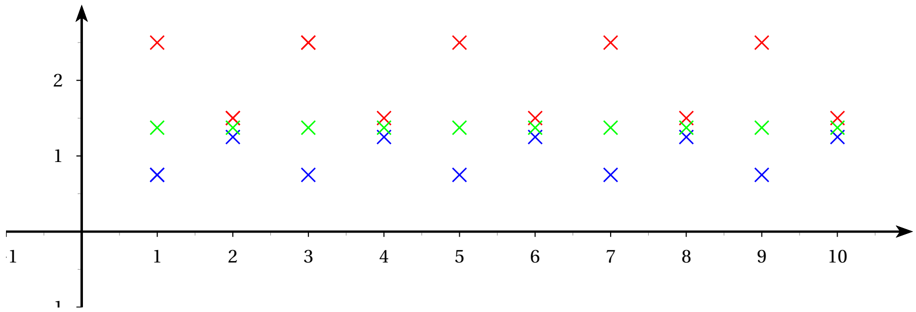
I Vrai ou faux ? (d'après concours ESIEE)

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses et justifier, soit par une propriété du cours, soit par un contre-exemple (éventuellement graphique).

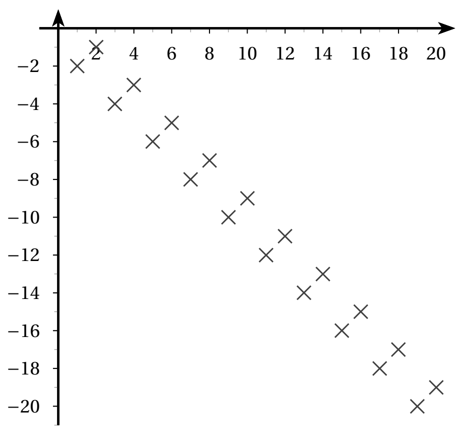
1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant pour tout $n \geqslant 0$: $.u_n \leqslant v_n \leqslant 2u_n$.
   (a) Si (u_n) converge, alors (v_n) converge.
   Faux : **contre-exemple** : $u_n = 1$ pour tout n donc $2u_n = 2$ et $v_n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{(-1)^n}{4}$.
   Sur le dessin, les termes u_n sont en bleu, $2u_n$ en rouge et v_n en vert.



   (b) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. C'est **vrai** (théorème ds gendarmes).
   (c) Si (u_n) ne converge pas, alors (v_n) ne converge pas. **Faux** : contre-exemple :
   $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{4}$ qui vaut alternativement $\dfrac{5}{4}$ ou $\dfrac{3}{4}$; $2u_n$ vaut donc alternativement $\dfrac{5}{2}$ ou $\dfrac{3}{2}$.
   On prend (v_n) constante, avec $v_n = \dfrac{11}{8}$. Illustration :



2. Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$:
   (a) Si (u_n) est strictement décroissante, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. **Faux** : contre-exemple : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. (u_n) est décroissante et tend vers 0.
   (b) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
   Faux : contre exemple : $u_n = -n + (-1)^n$. $u_n \leqslant -n + 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ et cette suite n'est pas monotone
   Illustration :



II

Démontrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
Soit P_n la proposition : $4^n + 5 = 3k_n$, $k_n \in \mathbb{Z}$.

- **Initialisation** : $4^0 + 5 = 6 = 3 \times 2$ donc $4^n + 5$ est bien un multiple de 3.

- **Hérédité** : On suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, donc $4^n+5=3k_n$, $k_n\in\mathbb{Z}$.
Alors : $4^{n+1}+5=4\times 4^n+5=4(3k_n-5)+5=12k_n+15=3(4k_n+5)=3k_{n+1}$ avec $kn+1=4k_n+5\in\mathbb{Z}$.
La propriété est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

Remarque : pour ceux qui suivent l'enseignement de spécialité, c'est facile à démontrer directement, car $4\equiv 1$ [3] donc $4^n\equiv 1^n$ [3] $\equiv$ 1 [3] donc, pour tout n, $4^n+5\equiv 6$ [3].

III

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_{à}=1 \\ u_{n+1}=u_n(5+u_n)\end{cases}$.

1. Démontrons par **récurrence** que tous les termes de cette suite (u_n) sont positifs.
   - $u_0=1>0$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.
   - On suppose la propriété vraie) un rang n quelconque, donc $u_n>0$; alors $5+u_n>0$ donc $u_{n+1}=u_n(5+u_n)>0$ et la rporpiété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, tous les termes u_n sont positifs.
2. $u_n>0$ pour tout n ; pour tout n, $\dfrac{un+1}{u_n}=5+u_n>5>1$, donc la suite (u_n) est **croissante**.

IV

Étudier dans chaque cas la limite éventuelle de la suite (u_n) :

a) $u_n=\dfrac{3n^2+5n+1}{n^2+1}$

Pour tout $n\neq 0$, $u_n=\dfrac{n^2\left(3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=3$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc par quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3}$

b) $u_n=\dfrac{n+2}{5n^2+1}$.

De même, $u_n=\dfrac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(5+\frac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{1+\frac{2}{n}}{n\left(5+\frac{1}{n^2}\right)}$.

$=1\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\dfrac{1}{n^2}\right)=5$ doù $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(5+\dfrac{1}{n^2}\right)\right]=+\infty$.

Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0}$.

c) $u_n=\dfrac{5+\cos(n)}{n+1}$

$\forall n$, $-1\leqslant\cos(n)\leqslant 1\Rightarrow 4\leqslant 5+\cos(n)\leqslant 6\Rightarrow\dfrac{4}{n+1}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{6}{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{n+1}\right)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{6}{n+1}\right)=0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0}$.

V D'après bac métropole juin 2009

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout $n\geqslant 1$: $nw_n=(n+1)w_{n-1}+1$.
Ce tableau donne les dix premiers termes de la suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. On a, pour $n\neq 0$: $w_n=\dfrac{(n+1)w_{n-1}+1}{n}$ donc $w_{10}=\dfrac{11w_9+1}{10}=\dfrac{11\times 19+1}{10}=21$; $\boxed{w_{10}=21}$.
2. La suite (w_n) semble la suite des nombres impairs. On **conjecture** que $w_n=2n+1$.
   Démontrons cette conjecture par récurrence.
   - Initialisation : $n=0$: $2\times 0+1=1=w_0$ donc c'est vrai au rang 0.

- Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang n : $w_n = 2n+1$.
  On calcule alors w_{n+1} : d'après la définition de la suite (w_n), on a :
  $w_{n+1} = \dfrac{(n+2)w_n+1}{n+1} = \dfrac{(n+2)(2n+1)+1}{n+1} = \dfrac{(2n^2+5n+3}{n+1} = \dfrac{(n+1)(2n+3)}{n+1} = 2n+3 = 2(n+1)+1$.
  La propriété est vraie au rang $n+1$ et elle donc héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{w_n = 2n+1}$.

3. On en déduit $u_{2000} = \boxed{4001}$.

VI Antilles-Guyane septembre 2010

1. D'après la définition $u_2 = u_1 - \dfrac{1}{4}u_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$.

   - Si la suite était géométrique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $-\dfrac{1}{2}$; or $u_1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \neq u_2$.
   - Si la suite était arithmétique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $\dfrac{1}{2} - (-1) = \dfrac{3}{2}$;

   or $u_1 + \left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{4}{2} = 2 \neq u_2$.
   Conclusion : la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. (a) $v_0 = u_1 - \dfrac{1}{2}u_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times (-1) = 1$.

   (b) On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = u_{n+2} - \dfrac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n - \dfrac{1}{2}u_{n+1} =$
   $\dfrac{1}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n\right) = \boxed{\dfrac{1}{2}v_n}$.

   (c) $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

   (d) On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \boxed{\dfrac{1}{2^n}}$.

3. (a) $w_0 = \dfrac{u_0}{v_0} = \dfrac{-1}{1} = \boxed{-1}$.

   (b) On a $w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \boxed{2 + \dfrac{u_n}{v_n}}$.

   (c) On a par définition $\dfrac{u_n}{v_n} = w_n$, donc l'égalité ci-dessus s'écrit :
   $\boxed{w_{n+1} = 2 + w_n}$.

   (d) L'égalité précédente montre que la suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme -1 et de raison 2.
   On a donc $w_n = w_0 + n \times 2 = -1 + 2n = \boxed{2n-1}$.

4. On a trouvé que $w_n = 2n-1 = \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \times u_n$.

   Donc $\boxed{u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}}$, car $2^n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

5. Démonstration par récurrence :
   - Initialisation : $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \dfrac{2\times 0+3}{2^0} = 2 - \dfrac{3}{1} = 2-3 = -1$. La formule est vraie au rang 0.
   - Hérédité : supposons qu'il existe un naturel k tel que :

   $S_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_k = 2 - \dfrac{2k+3}{2^k}$.

   Donc $S_{k+1} = S_k + u_{k+1} = 2 - \dfrac{2k+3}{2^k} + \dfrac{2(k+1)-1}{2^{k+1}} = 2 + \dfrac{-4k-6+2k+1}{2^{k+1}} = 2 + \dfrac{-2k-5}{2^{k+1}} = 2 - \dfrac{2k+5}{2^{k+1}} = 2 - \dfrac{2(k+1)+3}{2^{k+1}}$.
   La formule est vraie au rang $k+1$.

   On a donc démontré par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\boxed{S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}}$.