TS : corrigé du contrôle sur les nombres complexes (2 heures)

I 1,5 point

Déterminer les formes algébriques des nombres suivants :

$A = (2+3\mathrm{i})(1-7\mathrm{i}) = 2-14\mathrm{i}+3\mathrm{i}+21 = \boxed{23-11\mathrm{i}}$.

$B = (2-3\mathrm{i})^2 = 4-2\times 2\times 3\mathrm{i}-9 = \boxed{-5-12\mathrm{i}}$

$C = \dfrac{2+5\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} = \dfrac{(2+5\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{3^2+(-2)^2} = \dfrac{-4+10\mathrm{i}}{13} = \boxed{-\dfrac{4}{13}+\dfrac{19}{13}\mathrm{i}}$

II 2 points

Donner une forme trigonométrique des nombres suivants :

$A = 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \boxed{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

$B = \sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \boxed{2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)}$

$C = \boxed{-5 = 5(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)}$

$D = -3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 3\left(-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\pi\right)\right)$
$= \boxed{3\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)}$.

III 2,5 points

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i} = \boxed{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

2. Posons $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $Z = z^{2014}$.
   Pour trouver la forme algébrique de Z, on passe par la forme trigonométrique.
   - $|Z| = \left|z^{2014}\right| = |z|^{2014} = 1^{2014} = 1$.
   - $\arg(Z) = \arg\left(z^{2014}\right) = 2014\arg(z)$
     $= 2014\times\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\ [2\pi]$.
     On cherche la mesure principale de l'angle $2014\times\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1007}{3}\pi$..
     On cherche $k\in\mathbb{Z}$ tel que
     $-\pi \leqslant -\dfrac{1007}{3}\pi+2k\pi < \pi$.
     En simplifiant par π, on obtient :
     $-1 \leqslant -\dfrac{1007}{3}+2k < 1$
     $\Leftrightarrow -3 \leqslant -1007+6k < 3$
     $\Leftrightarrow -3+1007 \leqslant 6k < 3+1007$
     $\Leftrightarrow \dfrac{502}{3} \leqslant k < \dfrac{505}{3}$.
     On trouve $\boxed{k=168}$.

La mesure principale est donc
$-\dfrac{1007}{3}\pi+2\times 168\pi=\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$.

On en déduit :
$Z=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\boxed{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$.

IV 3 points

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2\mathrm{i}z=1-z$
$(2\mathrm{i}+1)z=1 \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{5}$
$=\boxed{\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}}$

b) $(2+3\mathrm{i})z=1-5\mathrm{i} \Leftrightarrow z=\dfrac{1-5\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\dfrac{(1-5\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{13}$
$=\dfrac{-13-13\mathrm{i}}{13}=\boxed{-1-\mathrm{i}}$.

c) Pour résoudre $z=2\overline{z}$, on pose $z=x+\mathrm{i}y$, x et y réels.
On obtient $x+\mathrm{i}y=2(x-\mathrm{i}y) \Leftrightarrow -x+3y\mathrm{i}=0$
$\Leftrightarrow x=0$ et $y=0$, donc $\boxed{z=0}$.

d) $z^2=-3$; $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\,\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}}$

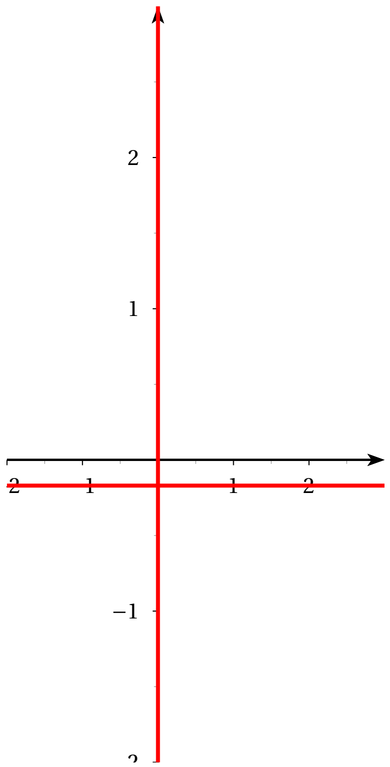
e) $3z^2+2z+5=0$
$\Delta=-56<0$; l'équation adieux solutions complexes conjuguées.
$z_1=\dfrac{-2-\mathrm{i}\sqrt{56}}{6}=\dfrac{-1-\sqrt{14}}{3}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{14}}{3}$.
$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{14}}{3}\,;\,\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{14}}{3}\right\}}$

V 2 points

Soit z un nombre complexe et soit z' le nombre complexe défini par $z'=(z-\mathrm{i})(3\mathrm{i}z-4)$.
On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$ $x'\in\mathbb{R}$ et $y'\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer x' et y' en fonction de x et de y.
   $z'=x'+\mathrm{i}y'=(x+\mathrm{i}y-\mathrm{i})(3\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)-4)$
   $=[x+(y-1)\mathrm{i}][(-3y-4)+3x\mathrm{i}]$
   $=x(-3y-4)-3x(y-1)+[3x^2+(y-1)(-3y-4)]\mathrm{i}$.
   On en déduit que $x'=x(-3y-4)-3x(y-1)=-6xy-x=-\boxed{x(6y+1)}$
   et $\boxed{y'=3x^2-3y^2-y+4}$
2. (a) z' est imaginaire pur si, et seulement si, sa partie réelle est nulle.
   $x"=0 \Leftrightarrow x(6y+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $y=-\dfrac{1}{6}$.
   Ce sont deux équations de droites.

(b) Gréphiquement, on obtient :



VI 3 points

On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2}(1+\mathrm{i})$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

1. La forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}} = \sqrt{2}\frac{(1+\mathrm{i})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)}{1} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} + \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}}.$$

2. • $z_1 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \boxed{2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

   • $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i} = \boxed{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

   • $\left[\dfrac{z_1}{z_2}\right] = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{2}{1} = 2.$

   $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{12}.$

   On en déduit : $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)}$.

3. En identifiant les patties réelles des formes algébrique et raigonométrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$, pn trouve :

$\boxed{\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2\left(\sqrt{3}-1\right)}}{4}}$ et $\boxed{\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2\left(\sqrt{3}+1\right)}}{4}}$

VII 3 points

Dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -1 - \text{i}$, $z_{\text{B}} = 2 - 2\text{i}$ et $z_{\text{C}} = 1 + 5\text{i}$.

1. (a) $z = \dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}. = \dfrac{2+4\text{i}}{3-\text{i}} = \dfrac{2\text{i}(3-\text{i})}{3-\text{i}} = \boxed{2\text{i}}$ (en mettant 2i en facteur au numérateur).

   (b) $|z| = |2\text{i} = 2$ et $\arg(z) = \arg(2\text{i}) = \boxed{\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]}$.

2. $|z| = \left|\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}\right| = \dfrac{|z_{\text{C}} - z_{\text{A}}|}{|z_{\text{B}} - z_{\text{A}}|} = \dfrac{\text{AC}}{\text{AB}}$ donc $\dfrac{\text{AC}}{\text{AB}} = 2$ d'où AC = 2AB.
   $\arg(z) = \left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

3. On en déduit que le triangle ABC est **rectangle** en A et **non isocèle**.

VIII 3 points

Soit (I) l'inéquation : $\text{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \text{e}^{x+3}$..

- L'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$.
- On suppose $x \neq 0$.
  $(I) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \leqslant x+3$ car $\text{e}^x \leqslant \text{e}^y \Leftrightarrow x \leqslant y$.
- POur $x \neq 0$, $\dfrac{1}{x} \leqslant x+3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - (x+3) \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x(x+3)}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2-3x+1}{x} \leqslant 0$.
- On étudie le signe du numérateur et du dénominateur et on consigne les résultats dans un tableau de signes.
  $\Delta = 13$; l'expression du second degré a deux racines : $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$		0		$\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$-x^2-3x+1$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
quotient		$+$	0	$-$	‖	$+$		$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\,;\,0\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\,;\,+\infty\right[}$$