TS1-TS2-TS3 : correction du contrôle commun n° 3 (4 heures)

Exercice 1

PARTIE I

Soi h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$.

1. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$ donc h est croissante sur $\mathbb{R}$.
   $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$.
   $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. On en déduit le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. h est continue comme somme de fonctions continues ; $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution.
   Comme h est croissante, cette solution est unique. On la note α.
3. À la calculatrice, on trouve $h(-1,28) < 0$ et $h(-1,27) > 0$ donc $\boxed{-1,28 < \alpha < -1,27}$.
4. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

Partie II

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

1. f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables.
   $h = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x\mathrm{e}^x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x + 1$.
   $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.
   On en déduit $f'(x) = \dfrac{(x+1)\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right) - x\left(\mathrm{e}^x\right)^2}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x\left[(x+1)\left(\mathrm{e}^x+1\right) - x\mathrm{e}^x\right]}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+x+1\right)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \boxed{\dfrac{\mathrm{e}^x h(x)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}}$
2. Le dénominateur est positif (carré d'un réel) ; $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $h(x)$.
   On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.
3. Par définition de α, on a $\mathrm{e}^\alpha + \alpha + 1 = 0$ donc $\mathrm{e}^\alpha = -\alpha - 1$.
   Alors : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha\mathrm{e}^\alpha}{\left(\mathrm{e}^\alpha + 1\right)} = \dfrac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1} = \dfrac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha} = \alpha + 1$.
   Comme $-1,28 < \alpha < -1,17$, on en déduit $\boxed{-0,28 < f(\alpha) < -0,27}$.
4. Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (a) L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 est :
   $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ donc $\boxed{y = \dfrac{1}{2}x}$.
   (b) Pour étudier la position relative de (T) et $\mathscr{C}$, on étudie le signe de $f(x) - \dfrac{1}{2}x$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{2x\mathrm{e}^x - x\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{2\left(\mathrm{e}^x+1\right)} = \dfrac{x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{2\left(\mathrm{e}^x+1\right)}$ qui est du signe du numérateur, car le dénominateur est positif.
   Pour $x > 0$, $x > 0$ et $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ donc le produit est positif.
   Pour $x < 0$, $x < 0$ et $\mathrm{e}^x - 1 < 0$ donc le produit est positif.
   $f(x) - \dfrac{1}{2}x = 0$ pour $x = 0$.
   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente (T)

5. (a) • Limite en $-\infty$:
D'après les formules de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

• Limite en $+\infty$:
$f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)} = \dfrac{x}{1+\dfrac{x}{e^x}}$.
D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}\right) = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right) = 1$.
On en déduit $\lim\limits_{x\to=\infty} f(x) = +\infty$.

On en déduit le tableau de variation de f :

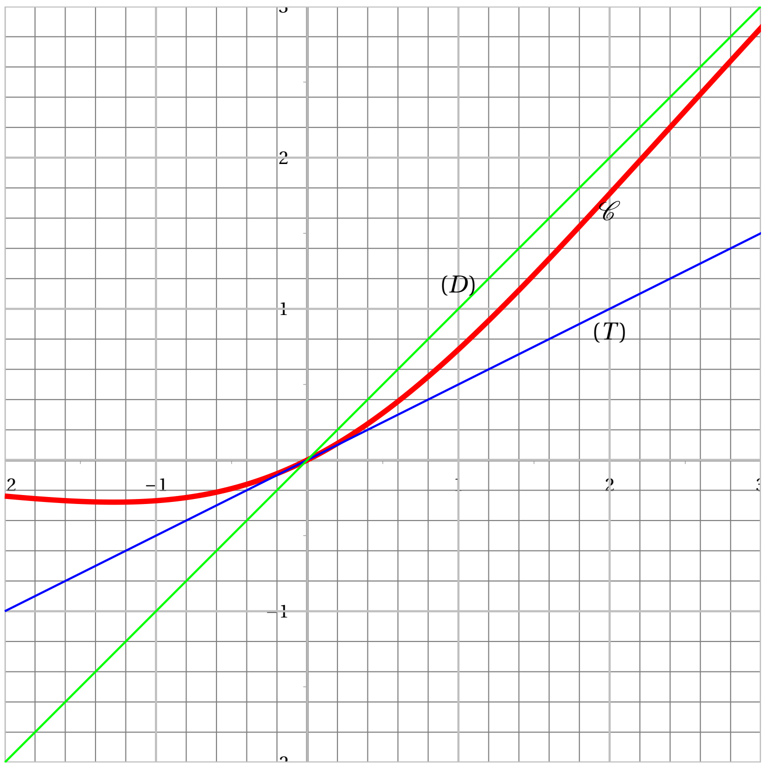
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Pour tout x, $f(x)-x = \dfrac{xe^x}{e^x+1} - x = x\left[\dfrac{e^x}{e^x+1}-1\right] = x\left[\dfrac{e^x-e^x-1}{e^x+1}\right] = -\dfrac{x}{e^x+1} = -\dfrac{x}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right) = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = 0$.
On en déduit que (D) est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

(c) Pour tout x, $f(x)-x = -\dfrac{x}{e^x+1}$ qui est du signe opposé à celui de x, donc positif pour $x \leqslant 0$ et négatif pour $x \geqslant 0$.
On en déduit que $\mathscr{C}$ est au-dessus de (D) pour $x \leqslant 0$ et en dessous pour $x \geqslant 0$.

(d) **Courbe :**



Exercice 2

1. Soit $\mathscr{A}$ la fonction définie sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $\mathscr{A}(x) = (\cos(x)+1)\sin(x)$.

(a) $\mathscr{A}$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables.
$\mathscr{A}'(x) = -\sin x \times \sin x + \cos x(\cos x + 1) = -\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x = \left(\cos^2 x + 1\right) + \cos^2 x + \cos x = \boxed{2\cos^2 x + \cos x - 1}$.

(b) $2X^2 + X - 1 = (X+1)(2X-1)$ qui s'annule en -1 et $\dfrac{1}{2}$.
On en déduit le tableau de signes :

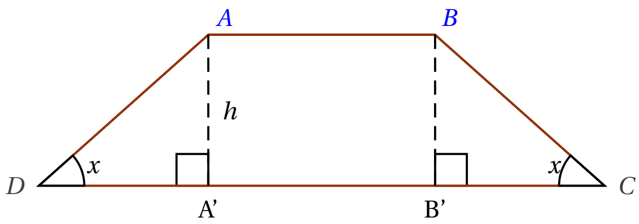
X	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2X^2+X-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(c) **Signe de $\mathscr{A}'(x)$.**
$\mathscr{A}'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 2X^2 + X - 1$ en posant $X = \cos x$.
$\mathscr{A}'(x)$ est donc positif pour $\cos(x) \leqslant -1$ ou $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$ et négatif pour $-1 \leqslant \cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Or $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $\cos x = \dfrac{1}{2}$ pour $x = \dfrac{\pi}{3}$.
On en déduit que $\mathscr{A}'(x) \geqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$ et négatif pour $\dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
Variations de $\mathscr{A}$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1

2. **Application numérique**

On considère le trapèze isocèle ABCD ci-dessous où AD = AB = BC = 1.



L'aire d'un trapèze est $\mathscr{A} = \dfrac{(\text{Petite base } + \text{Grande base}) \times \text{Hauteur}}{2}$.
La petite base vaut AB = 1.
La grande base vaut DC = DA' + A'B' + B'C = AD $\times \cos x + 1 + BC \times \cos x = \cos x + 1 + \cos x = 1 + 2\cos x$.
La hauteur est $h = \text{AD}\sin x = 1 \times \sin x = \sin x$.
On en déduit : $\mathscr{A} = \dfrac{(2+2\cos x)\sin x}{2} = (1+\cos x)\sin x$.
On retrouve la fonction étudiée dans la question 1.
On en déduit que l'aire est maximale pour $\boxed{x = \dfrac{\pi}{3}}$.

Exercice 3

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par :

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n.$$

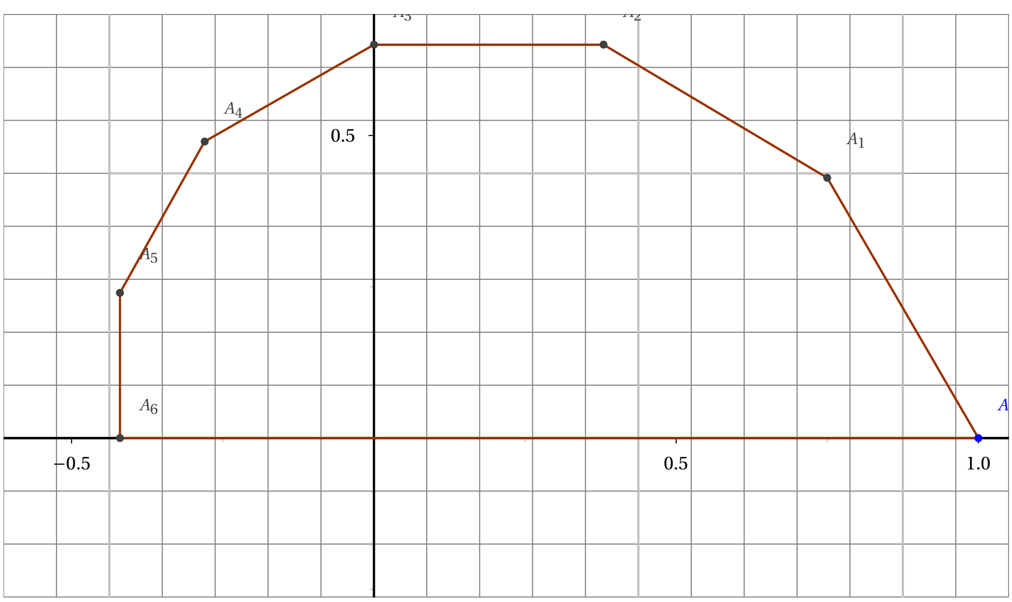
On note An le point d'affixe z_n,

1. (a) On pose $q = \dfrac{3}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

On obtient successivement : $\boxed{z_1 = z_0 \times q = \dfrac{3}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$; $\boxed{z_2 = qz_1 = \dfrac{3+3\sqrt{3}\mathrm{i}}{8}}$; $\boxed{z_3 = qz_2 = \dfrac{3\sqrt{3}\mathrm{i}}{8}}$

$z_4 = qz_3 = \dfrac{-9+9\sqrt{3}\mathrm{i}}{32}$; $\boxed{z_5 = qz_4 = \dfrac{-27+9\sqrt{3}\mathrm{i}}{64}}$ et $\boxed{z_6 = qz_5 = -\dfrac{27}{64}}$

(b) **Figure** :



2. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, $z_{n+1} - z_n = qz_n - qz_{n-1} = q(z_n - z_{n-1}) = \left(\frac{3}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$..

   (b) Pour tout n, $d_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|q(z_n - z_{n-1})\right| = |q|\,|(z_n - z_{n-1})| = |q|d_n$.
   Or, $|q| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| = \frac{1}{4}\left|3 + \sqrt{3}\mathrm{i}\right| = \frac{1}{4} \times \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4} \times \sqrt{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $\boxed{d_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} d_n}$.

   (c) d_n est la **longueur** du segment A_nA_{n+1}.

   (d) Pour tout $n \geqslant 1$, $d_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} d_n$, donc la suite (d_n) est une suite géométrique, de raison $q' = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Pour tout $n \geqslant 1$, $L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ qui est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

   $L_n = d_1 \times \frac{1 - q'^n}{1 - q'}$ avec $d_1 = |z_1 - z_0| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} - 1\right| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

   Par conséquent : $L_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{2 - \sqrt{3}}}$.

   Comme $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = \boxed{\frac{1}{2 - \sqrt{3}}}$.

3. Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n l'argument de z_n dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, $z_{n+1} = qz_n$ donc $\arg(z_{n+1}) = \arg\left(qz_n\right) = \arg(q) + \arg(z_n) = \arg(q) + a_n$.
   Soit θ un argument de q.

   On doit avoir $\cos\theta = \frac{\frac{3}{4}}{|q|} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}$.

   On en déduit que $\arg(q) = \frac{\pi}{6}$.

   Pour tout n, $\boxed{a_{n+1} = a_n + \frac{\pi}{6}}$.

   La suite (a_n) est donc arithmétique de raison $r = \frac{\pi}{6}$.
   Le premier terme est $a_0 = \arg(z_0) = \arg(1) = \pi$.
   Par conséquent, $a_n = a_0 + nr = n\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

   (b) Les points O, A_0 et A_n sont alignés si, et seulement si, $\left(\overrightarrow{OA_0}\,;\,\overrightarrow{0A_n}\right) = O\ [\pi] \Leftrightarrow \arg(z_n) - \arg(z_0) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc pour $n\frac{\pi}{6} = k\pi$, c'est-à-dire pour $\boxed{n = 6k}$.
   $\boxed{n \text{ doit être un multiple de } 6}$.

Exercice 4 pour les non-spécialistes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   (a) $\left(e^{3x+1}\right)^2 = \dfrac{e}{e^{-2x}} \Leftrightarrow e^{2(3x+1)} = e^{1-(-2x)} \Leftrightarrow e^{6x+2} = e^{2x+1}$.

   Or, $e^X = e^Y \Leftrightarrow X = Y$ donc l'équation équivaut à $6x+2 = 2x+1$, donc $x = -\dfrac{1}{4}$.

   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}}$.

   (b) Soit l'inéquation $e^{\frac{-3x+1}{2x+3}} \leqslant 1$.

   - L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.
   - On suppose $x \neq -\dfrac{3}{2}$.

     Alors : $e^{\frac{-3x+1}{2x+3}} \leqslant 1 \Leftrightarrow e^{\frac{-3x+1}{2x+3}} \leqslant e^0 \Leftrightarrow \dfrac{-3x+1}{2x+3} \leqslant 0$, car, comme la fonction exp est croissante, $e^x \leqslant e^y \Leftrightarrow x \leqslant y$.

     On renseigne un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$2x+3$		$-$	‖	$+$		$+$	
$\dfrac{-3x+1}{2x+3}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

   On en déduit $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[\cup \left[\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[}$

2. $A = \dfrac{e^{2-x} \times e^{3x-5}}{e^{-2x} \times e^2} = e^{2-x+3x-5-(-2x+2)} = e^{2-x+3x-5+2x-2} = \boxed{e^{4x-5}}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

   (a) $3+4i-4iz = 2z-4 \Leftrightarrow 7+4i = (2+4i)z \Leftrightarrow z = \dfrac{7+4i}{2+4i} = \dfrac{7+4i}{2(1+2i)} \Leftrightarrow z = \dfrac{(7+4i)(1-2i)}{2\left(1^2+2^2\right)} = \dfrac{15-10i}{10} \Leftrightarrow \boxed{z = \dfrac{3}{2} - i}$.

   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{3}{2} - i\right\}}$.

   (b) $2z + \overline{z} = 9 + i$ On pose $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

   $2z + \overline{z} = 9+i \Leftrightarrow 2x + 2iy + x - iy = 9+i \Leftrightarrow 3x + ii = 9+i \Leftrightarrow x = 3$ et $y = 1$ en identifiant parties réelle et imaginaire.

   $\boxed{\mathscr{S} = \{3+i\}}$.

   (c) Soit l'équation $z^4 + z^2 - 20 = 0$.

   On pose $Z = z^2$. L'équation équivaut alors à $\begin{cases} Z = z^2 \\ Z^2 + Z - 20 = 0 \end{cases}$. Résolvons l'équation $Z^2 + Z - 20 = 0$.

   $\Delta = 81 > 0$. L'équation adieux solutions réelles : $Z_1 = -5$ et $Z_2 = 4$.

   On résout alors les équations $z^2 = Z_1 = -5$ et $z^2 = Z_2 = 4$.

   On trouve alors quatre solutions : $\boxed{\mathscr{S} = \{-i\sqrt{5}\,;\, i\sqrt{5}\,;\, -2\,;\, 2\}}$

4. **QCM :**

   (a) Soit z un nombre complexe. $|z+i| = |i(1-iz)| = |1-iz| = \left|\overline{1-iz}\right| = |1-i\overline{z}| = |1+i\overline{z}| = |i\overline{z}+1|$ (réponse **c.**)

   (b) $\arg\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}\right) = \arg(-1+i\sqrt{3}) - \arg\left(\overline{z}\right)$.

   $-1+i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ d'où $\arg\left(-1+i\sqrt{3}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

   $\arg\left(\overline{z}\right) = -\arg(z) = -\theta$.

   Finalement : $\arg\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}\right) = \dfrac{2\pi}{3} - (-\theta) = \boxed{\dfrac{2\pi}{3} + \theta}$ (réponse **b.**)

   (c) $\dfrac{5-2i}{4+3i} = \dfrac{(5-2i)(4-3i)}{4^2+3^2} = \dfrac{14-23i}{25} = \boxed{\dfrac{14}{25} - \dfrac{23}{25}i}$ (réponse **b.**)

   (d) Le conjugué de $\dfrac{1-z}{1+i}$ est $\dfrac{\overline{1-z}}{\overline{1+i}} = \boxed{\dfrac{1-\overline{z}}{1-i}}$ (réponse **c.**)