Correction du contrôle commun n° 2

I

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   Pr, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, donc la proposition est vraie.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
   Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 2u_n + 1$.
   (a) Soit $u_0 = 1$. Par récurrence, on montre que, pour tout n, $2u_n + 1 > 0$, c'est-à-dire $u_n > -\dfrac{1}{2}$.
   - Initialisation : $u_0 = 1 > -\dfrac{1}{2}$ donc c'est vrai au rang $n = 0$.
   - On suppose que $u_n > -\dfrac{1}{2}$ pour un rang n quelconque ; alors $2u_n > -1$ et $2u_n + 1 > 0 > -\dfrac{1}{2}$.
     La propriété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, pour tout n,
   $2u_n + 1 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$

   (b) Si $u_0 = -2$, alors la suite (u_n) est décroissante. On montre par exemple par récurrence que $u_n < -1$ (facile à faire). On en déduit que $2u_n + 1 < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante

   (c) Si $u_0 = -\dfrac{1}{2}$, alors la suite (u_n) est constante. (se montre par récurrence)
3. Toute suite v à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.
   C'est faux ! Contre-exemple : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$.
4. La suite de terme général $u_n = 0{,}999\,999\,999^n$ converge vers 1.
   C'est faux ! $-1 < 0{,}999\,999\,999 < 1$ donc
   $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}999\,999\,999^n = 0}$.

II

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010 + n)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. Pour tout n, on a $u_{b+1} = u_n - \dfrac{5}{100}u_n + 3 = \boxed{0{,}95u_n + 3}$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.
   (a) Pour tout n, $v_{n+1} = 60 - u_{n+1} = 60 - (0{,}95u_n + 3) = 57 - 0{,}95u_n = 0{,}95\,(60 - u_n) = \boxed{0{,}95v_n}$
   On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}95$.
   (b) Le premier terme est $v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10$.
   On en déduit ue, pour tout n, $\boxed{v_n = 10 \times 0{,}95^n}$.
   (c) On a $v_n = 60 - u_n$, donc $u_n = 60 - v_n$
   $= \boxed{60 - 10 \times 0{,}95^n}$.
3. 2015 correspond à $n = 5$; $u_5 = 52{,}262$ donc le nombre d'arbres en 2015 est environ égal à 52 262 (à un arbre près)
4. (a) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n$
   $= \left[60 - 10 \times 0{,}95^{n+1}\right] - \left[60 - 10 \times 0{,}95^n\right]$
   $= 10 \times 0{,}95^n - 10 \times 0{,}95^{n+1}$
   $= 10 \times 0{,}95^n(1 - 0{,}95) = 10 \times 0{,}05 \times 0{,}95^n = \boxed{0{,}5 \times 0{,}95^n}$.
   (b) Pour tout n, $0{,}5 \times 0{,}95^n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$; la suite (u_n) est **croissante**.
5. $50 + 50 \times \dfrac{10}{100} = 50 \times 1{,}1 = 55$.
   On doit trouver n tel que $u_n \geqslant 55$.
   À la calculatrice, on trouve que $n \geqslant 14$, donc le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010 en 2024.
6. $-1 < 0{,}95 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}95^n = 0$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 60$.
   Le nombre d'arbres va se stabiliser à 60 000.

III

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$

1. Montrons par récurrence que, pour tout n, $u_n > 0$.
   - $u_0 = 3 > 0$ donc c'est vai pour $n = 0$.
   - On suppose que $u_n > 0$ pour une valeur de n quelconque.
     Alors, comme $\sqrt{u_n^2 + 1} > 0$, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} > 0$.
     La prpriété est donc héréditaire.

   On en déduit que $u_n > 0$ pour tout n.
2. D'après la question 1., $u_n > 0$; alors $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} < 1}$
   car $u_n^2 + 1 > 1$ donc $\sqrt{u_n^2 + 1} > \sqrt{1} = 1$.
   On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc convergente vers une limte ℓ avec $\ell \geqslant 0$.
4. $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.
   f est continue, donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
   $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = x \Leftrightarrow x\left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right] = 0$.
   $x = 0$ est une soluton.
   Si $x \neq 0$, $\sqrt{x^2 + 1} > 1$ donc $1 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \neq 0$.
   La seule solution est 0, donc la limite de la suite est $\boxed{\ell = 0}$.

IV

a) $\displaystyle\lim_{x\to}\left(\frac{3}{x}\right) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{3}{x}\right) = \boxed{2}$ par somme.

b) Pour tout $x \neq 0$, $3x^2 - 8x + 1 = x^2\left(3 - \dfrac{8}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(3 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 3$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = \boxed{+\infty}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2 - 8x + 1\right) = +\infty$

c) Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{6x-1}{3x^2+x-2} = \dfrac{x\left(5-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right)} = \dfrac{6-\frac{1}{x}}{x\left(3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6-\dfrac{}{x}\right) = 6$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}\right) = 3$ donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}\right)\right] = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x-1}{3x^2+x-2}\right) = \boxed{0}$

d) Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 2, donc on peut les factoriser par $(x-2)$.
$3x^2-5x-2 = (x-2)(x+1)$ et $2x^2-5x+2 = (x-2)(2x-1)$.
Pour $x \neq 2$, $\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2} = \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(2x-1)} = \dfrac{x-1}{2x-1}$.
Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right) = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

e) Pour $x \neq 3$, $\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \dfrac{\left[\sqrt{x+6}-3\left[\sqrt{x+6}+3\right]\right]}{(x-3)\left[\sqrt{x+6}+3\right]} = \dfrac{x-3}{(x-3)\left[\sqrt{x+6}+3\right]} = \dfrac{1}{\sqrt{x+6}+3}$ d'où $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\right)$
$= \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+6}+3}\right) = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

f) Pour $x \neq 0$ $\dfrac{5x-3}{2x+1} = \dfrac{x\left(5-\frac{3}{x}\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{5-\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}}$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x-3}{2x+1}\right) = \dfrac{5}{2}$.

Alors : $\lim\limits_{x\to*\infty}\sqrt{\dfrac{5x-3}{2x+1}} = \lim\limits_{X\to\frac{5}{2}}\sqrt{X} = \boxed{\sqrt{\dfrac{5}{2}}}$ (d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée).
Attention aux manipulations sur les racines carrées ; par exemple, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ uniquement si $a>0$ et $b>0$.

V

Sot f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax+3 & \text{si } x \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[\\ \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+15}} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right] \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x \in]1\,;\,+\infty[\end{cases}$$

1. Sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, f est continue et est la restriction d'une fonction continue, donc $\lim\limits_{x\to 1 x<1} f(x) = f(1) = \sqrt{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{4}$.
Pour savoir si f est continue en 1, il reste à montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{4}$.
Or, pur $x>1$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$
$= \dfrac{\left[\sqrt{x+3}-2\right]\times\left[\sqrt{x+3}+2\right]}{(x-1)\times\left[\sqrt{x+3}+2\right]} = \dfrac{x-1}{(x-1)\left[\sqrt{x+3}+2\right]} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}}$.
Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right) = \boxed{\dfrac{1}{4} = f(1)}$.
On en déduit que f est continue en 1.

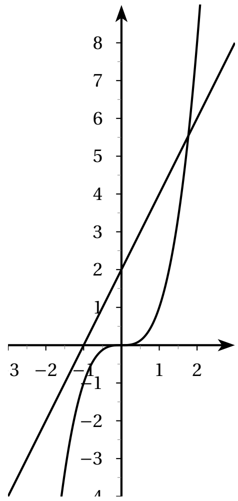
2. De même, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} f(x) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.
Pour que f soit continue en $\dfrac{1}{1}$, il faut que $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}} f(x) = 0$ donc $a\times\dfrac{1}{2}+3 = 0$.
On en déduit $\boxed{a=-6}$.

VI

Soit (E) l'équation : $x^3-2x-2=0$.

1. L'équation (E) s'écrit $f(x)=0$ en définissant la fonction f par $f(x) = x^3-2x-2$.
   - f est continue (polynôme)
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ en mettant x^3 en facteur.
   - De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution.
2. L'équation (E) s'écrit $x^3 = 2x+2$. les solutions de (E) sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes représentatives des deux fonctions $x\longmapsto x^3$ et $x\longmapsto 2x+2$.



Il n'y a qu'une intersection, donc l'équation semble n'avoir qu'une solution.
3. Étudions les variations de la fonction f.
f est dérivable et $f'(x) = 3x^2-2$.
$f'(x) = 0$ pour $x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$		$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\approx -0{,}91$	↘	$\approx -3{,}09$	↗	$+\infty$

D'après les variations et les valeurs des extrema, on trouve que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.

4. Avec une calculatrice, on trouve que la solution α vaut environ $\boxed{1,77}$.

VII (Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n+2}{2u_n+1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. (se montrerait pat técurrence)

1. (a) On a $u_1 = \boxed{\frac{4}{5} = 0,8}$; $u_1 = \boxed{\frac{14}{13} \approx 1,08}$; $u_3 = \boxed{\frac{40}{41} \approx 0,98}$; $\boxed{u_4 = \frac{122}{121} \approx 1,01}$

   (b) $u_0 - 1 = 1 > 0$ et $(-1)^0 = 1$: $u_1 - 1 \approx -0,2 < 0$ et $(-1)^1 = -1$; $u_2 - 1 \approx 0,08 > 0$ et $(-1)^2 + 1$; $u_3 - 1 \approx -0,02 < 0$ et $(-1)^3 = -1$; $u_4 - 1 \approx 0,01 > 0$ et $(-1)^4 = 1$ donc, pour l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

   (c) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1 = \frac{u_n + 2 - (2u_n+1)}{2u_n+1} = \frac{-o_n+1}{2u_n+1} = \boxed{-\frac{u_n-1}{2u_n+1}}$

   (d) Soit P_n la propriété « n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$ ».

   - Au rang 0, la propriété est vraie (déjà vérifiée)
   - On suppose que $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$ pour un entier n.
     Alors : $u_{n+1} - 1 = -\frac{u_n-1}{2u_n+1}$; Si $u_n - 1$ a le signe de $(-1)^n$, alors $-(u_n-1)$ a le signe de $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$. Quant au dénominateur, comme $u_n > 0$ pour tout n, $2u_n + 1 > 0$ donc la propriété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$.

   (a) Pour tout b, $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$
   $= \frac{\frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1} + 1} = \frac{\frac{-u_n+1}{2u_n+1}}{\frac{3u_n+3}{2u_n+1}} = \boxed{\frac{-u_n+1}{3u_n+3}}$.

   (b) Pour tout n, $v_{n+1} = -\frac{u_n-1}{3(u_n+1)} = -\frac{1}{3} \times \frac{u_n-1}{u_n+1}$
   $= \boxed{-\frac{1}{3} v_n}$.

   Pour tout n, $v_{n+1} = -\frac{1}{3} v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$.

   On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 q^n$
   $= \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \boxed{(-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$.

   (c) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$.

   On obtient $\boxed{u_n = \frac{1 + (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}}$.

   Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$; on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$.