TS : correction du contrôle (sujet A) (sur 10 points)

I (1,5 points)

C'est du cours !
Une suite (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

II (1,5 points)

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

III (3,5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \end{cases}$.

1. • $u_1 = \dfrac{1}{5}u_0 + 3 = \dfrac{1}{5} + 3 = \dfrac{1+3\times 5}{5} \boxed{\dfrac{16}{5}}$.
   • $\dfrac{16}{5} > 1$ donc $\boxed{u_1 > u_0}$
2. Soit P_n la propriété $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Effectuons une démonstration par récurrence :
   • Initialisation : on a déjà montré $u_1 > u_0$ à la question précédente donc P_0 est vraie.
   • Supposons P_n vraie pour un entier n quelconque, donc $u_{n+1} > u_n$.
   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{5}x + 3$ est croissante (coefficient directeur positif), donc f respecte l'ordre.
   Puisque $u_{n+1} > u_n$, $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ donc $u_{n+2} > u_{n+1}$; la propriété P_n est donc héréditaire.

   Autre méthode :
   $u_n < u_{n+1} \Rightarrow \dfrac{1}{5}u_n < \dfrac{1}{5}u_{n+1} \Rightarrow \dfrac{1}{5}u_n + 3 < \dfrac{1}{5}u_{n+1} + 3$ d'où $u_{n+2} < u_{n+1}$

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.
   La suite (u_n) est donc **croissante**.

IV (3,5 points)

Soit P_n la propriété : « $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ » pour $n \geqslant 1$.
Démontrons cette propriété par récurrence.

- initialisation : la somme S_n contient n termes au rang n donc pour $n = 1$, $S_1 = 1$ et la partie droite est $1^2 = 1 = S1$ donc P_1 est vraie.
- Hérédité : Supposons P_n vraie pour un entier n quelconque, donc $u_{n+1} > u_n$, donc $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.
  Au rang $n+1$: $S_{n+1} = S_n + (2(n+1)-1) = S_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (identité remarquable).
  P_{n+1} est donc vraie ; elle est donc héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

TS : correction du contrôle (sujet B) (sur 10 points)

I (1,5 points)

C'est du cours !
Une suite (u_n) est décroissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

II (1,5 points)

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

III (3,5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{5}u_n - 1 \end{cases}$.

1. • $u_1 = \dfrac{4}{5}u_0 - 1 = \dfrac{4}{5} \times 3 - 1 = \dfrac{12}{5} - 1 = \boxed{\dfrac{7}{5}}$.

   • $\dfrac{7}{5} < 3$ donc $\boxed{u_1 < u_0}$

2. Soit P_n la propriété $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Effectuons une démonstration par récurrence :
   - Initialisation : on a déjà montré $u_1 < u_0$ à la question précédente donc P_0 est vraie.
   - Supposons P_n vraie pour un entier n quelconque, donc $u_{n+1} < u_n$.
     La fonction $f : x \mapsto \dfrac{4}{5}x - 1$ est croissante (coefficient directeur positif), donc f respecte l'ordre.
     Puisque $u_{n+1} < u_n$, $f(u_{n+1}) < f(u_n)$ donc $u_{n+2} < u_{n+1}$; la propriété P_n est donc héréditaire.

     Autre méthode :
     $u_n > u_{n+1} \Rightarrow \dfrac{4}{5}u_n > \dfrac{4}{5}u_{n+1} \Rightarrow \dfrac{4}{5}u_n - 1 <> \dfrac{4}{5}u_{n+1} - 1$ d'où $u_{n+2} > u_{n+1}$

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.
   La suite (u_n) est donc **décroissante**.

IV (3,5 points)

Soit P_n la propriété : « $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ » pour $n \geqslant 1$.
Démontrons cette propriété par récurrence.

- initialisation : la somme S_n contient n termes au rang n donc pour $n = 1$, $S_1 = 1$ et la partie droite est $1^2 = 1 = S_1$ donc P_1 est vraie.
- Hérédité : Supposons P_n vraie pour un entier n quelconque, donc $u_{n+1} > u_n$, donc $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.
  Au rang $n+1$: $S_{n+1} = S_n + (2(n+1) - 1) = S_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (identité remarquable).
  P_{n+1} est donc vraie ; elle est donc héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$