# TS : correction du contrôle sur la fonction ln (2 heures)

## I (1,5 point)

Exprimer en fonction de ln 2 les rôles suivants :

- $\ln 8 = \ln\left(2^3\right) = \boxed{3\ln 2}$
- $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) 2 - \ln 4 = -\ln\left(2^2\right) = \boxed{-2\ln 2}$
- $\ln(16\text{e}) = \ln 16 + \ln \text{e} = \ln\left(2^4\right) + 1 = \boxed{4\ln 2 + 1}$
- $\ln(\sqrt{2}) = \boxed{\dfrac{1}{2}\ln 2}$

## II (3 points)

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(2x-1) + \ln(-x+5)$

On doit avoir $\begin{cases} 2x-1>0 \\ -x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x<5 \end{cases}$.

L'ensemble de définition de $f$ est $\boxed{\mathscr{D}_f = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,5\right[}$

b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{2x+3}{x-2}\right)$

On doit avoir $\dfrac{2x+3}{x-2} > 0$ ; 2 est la valeur interdite.

$2x+3=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$.

On renseigne alors un tableau de signe ;

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | |
| $x-2$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $+$ | |
| $\dfrac{2x+3}{x-2}$ | $+$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $+$ | |

L'ensemble de définition de $g$ est $\boxed{\mathscr{D}_g = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[ \cup ]2\,;\,+\infty[}$

## III (3 points)

Résoudre l'inéquation : $\ln(x) \geqslant \ln 4 - \ln(x+1)$

- Ensemble de définition : on coir avoir $\begin{cases} x>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$.

  lM'ensemble de définition est $\mathscr{D} = ]0\,;\,+\infty[$.
- Pour $x \in \mathscr{D}$, $\ln(x) \geqslant \ln 4 - \ln(x+1) \Leftrightarrow \ln(x) + \ln(x+1) \geqslant \ln 4 \Leftrightarrow \ln[x(x+1)] \geqslant \ln 4 \Leftrightarrow x(x+1) \geqslant 4$ (car la fonction ln est croissante).

  $x(x+1) \geqslant 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 \geqslant 0$.

  $\Delta = 17 > 0$ ; il y a deux racines $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

$x^2+x-4 \geqslant 0$ sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right[ \cup \left]\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\,;\,+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right[ \cup \left]\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\,;\,+\infty\right[ \cap \mathscr{D}$ donc $\boxed{\mathscr{S} = \left]\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\,;\,+\infty\right[}$

## IV (2,5 points)

Déterminer la limite aux bornes de son ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x - \ln x$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc, par soustraction, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$
- En $+\infty$, on a une forme indéterminée.

  Pour $x \neq 0$, $f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

  D'après les formules de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to =\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$ d'où, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ définie sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,+\infty[$

- Pour $x \neq 0$, $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$ d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 1$.

  Alors : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0}$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} x = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} (x+1) = 0$ avec $x+1<0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = +\infty$.

  Alors : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} g(x) = \lim\limits_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x+1) = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} = 0$ avec $\dfrac{x}{x+1} > 0$.

  Alors : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{X\to +\infty} \ln X = +\infty$, onc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = +\infty}$

## V (3 points)

Soit $g$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - x\ln x.$$

1. - Limite en 0 : D'après les formules de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0}$.
   - Limite en $+\infty$ : $g(x) = x(1-\ln x)$.

     $\lim\limits_{x\to +\infty} (1-\ln x) = -\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty}$
2. $g$ est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables.

   $\forall x > 0$, $g'(x) = 1 - \left[1\times\ln x + x\times\dfrac{1}{x}\right] = 1 - [\ln x + 1] = -\ln x$ ; $\boxed{g'(x) = -\ln x}$.
3. $\ln x = 0$ pour $x = 1$ et $\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$.

   On en déduit le tableau de variation de $g$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | ‖ $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

# VI (7 points)

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=1+\ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthononnal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
On note $D$ la droite d'équation $y=x$.

## Partie A

1. (a) Sens de variation de la fonction $f$ :

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{1+x}>0 \text{ sur } ]-1\,;\,+\infty[}$$

La fonction $f$ est donc **croissante** sur $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

(b) Limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition :

$$\boxed{\lim_{x\to-1^+} f(x)=-\infty} \text{ car } \lim_{x\to-1^+}(1+x)=0^+ \text{et } \lim_{x\to-1^+}\ln(1+x)=-\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty} \text{ car } \lim_{x\to+\infty}(1+x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$$

Tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$.

(a) $\boxed{\lim_{x\to-1} g(x)=-\infty}$ : $\lim_{x\to-1} g(x)\ \lim_{x\to-1} 1-x+=\ln(1+x)=-\infty$

$$\lim_{x\to-1} g(x)=\lim_{x\to-1} 1-x+\ln(1+x)=-\infty \text{ car } \lim_{x\to-1^+} 1+x=0^+,\ \lim_{x\to-1^+}\ln(1+x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to-1} 1-x=2$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=0$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+x=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+x)\left(\frac{1-x}{1+x}+\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right)=-\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{1+x}=-1$$

(c) Sens de variation de la fonction $g$

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \boxed{\frac{-x}{1+x}} \text{du signe de } -x \text{ sur } ]-1\,;\,+\infty[$$

La fonction $g$ est donc strictement croissante sur $]-1;0[$ et strictement décroissante sur $]0;\ +\infty[$.
Tableau de variations de la fonction $g$ :

| $x$ | $1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

(d) Sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$, la fonction $g$ est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $]-1\,;\,0[$ sur $]-\infty\,;\,1[$. Or 0 appartient ‡ l'ensemble d'arrivée $]-\infty\,;\,1[$. Donc, 0 possède un unique antécédent, noté $\alpha$ dans $]-1\,;\,0[$.
Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction $g$ est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ sur $]-\infty\,;\,1[$. Or 0 appartient ‡ l'ensemble d'arrivée $]-\infty\,;\,1[$. Donc, 0 possède un unique antécédent, noté $\beta$ dans $]0\,;\,+\infty[$.
De plus :

$$\left\{\begin{array}{l} g(2) \simeq 0,0986 > 0 \\ g(3) \simeq -0,614 < 0 \end{array}\right. \Longrightarrow 2 \leqslant \beta \leqslant 3$$

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

(e) Signe de $g(x)$ :
— $-1 < x \leqslant \alpha \Longrightarrow g(x) \leqslant g(\alpha) = 0$. (La fonction $g$ est croissante sur $[-1;\alpha[$).
— $\alpha \leqslant x \leqslant 0 \Longrightarrow g(\alpha) = 0 \leqslant g(x)$. (La fonction $g$ est croissante sur $[\alpha;0]$).
— $0 \leqslant x \leqslant \beta \Longrightarrow g(x) \geqslant 0 = g(\beta)$. (La fonction $g$ est décroissante sur $[0;\beta[$).
— $x \geqslant \beta \Longrightarrow g(x) \leqslant 0 = g(\beta)$. (La fonction $g$ est décroissante sur $[\beta;+\infty[$).

Position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $D$ :
— $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la droite $D$ pour $x \in ]\alpha\,;\,\beta[$.
— $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de la droite $D$ pour $x \in ]-1\,;\,\alpha[ \cup ]\beta\,;\,+\infty[$.

## Partie B

*Dans cette partie, toute trace de recherche, mÍme incomplète, ou d'initiative, mÍme non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout nombre entier naturel $n$ par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$

1. Pour tout nombre entier naturel $n$, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$. Démontrons cette propriété par récurrence :
— On a $2 \leqslant u_0 = 2 \leqslant \beta$

— Supposons que, pour un $n$ donné, on ait : $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$, alors, la fonction $f$ étant croissante sur $[2\,;\,\beta]$ :

$$2 \leqslant u_n \leqslant \beta \Longrightarrow \boxed{2} \leqslant 2,09861228867 \simeq f(2) \leqslant f(u_n) = \boxed{u_{n+1}} \leqslant f(\beta) = \boxed{\beta}$$

— Ainsi,
$boxed forall n,\ n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.

2. Pour tout $n$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geqslant 0$ sur $[2\,;\,\beta]$.
Donc, $(u_n)$ étant une suite croissante et majorée par $\beta$, elle est **convergente**.