Correction du bac blanc de mars 2016

Exercice I

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

1. Soit le polynôme P tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

a. $P(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 6 \times 2 - 4 = 8 - 16 + 12 - 4 = 0$ donc 2 est une racine de P.

b. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z-2)\left(az^2 + bz + c\right) = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$.
Par identification, on trouve :

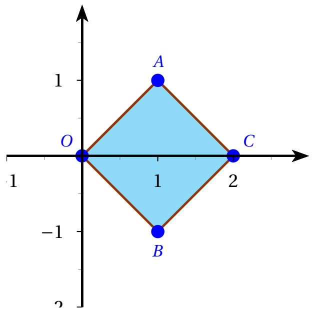
$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b - 2a = -4 \\ c - 2b = 6 \\ -2c = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -4 + 2a = -2 \\ c = 6 + 2b = 2 \\ c = 2 \end{array}\right. .$$

On en déduit

$$\boxed{P(z) = (z-2)\left(z^2 - 2z + 2\right)}.$$

2. On résout l'équation $P(z) = 0$. Un produit de facteurs dans $\mathbb{C}$ est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

- $z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 2$
- $z^2 - 2z + 2 = 0$; $\Delta = -4 < 0$: il y a deux solutions complexes conjuguées, $\dfrac{2-2\text{i}}{2} = \boxed{1-\text{i}}$ et $\boxed{1+\text{i}}$.



On note $\alpha = 1 + \text{i}$ et $\beta = 1 - \text{i}$.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives α , $1 - \text{i}$ et 2.
A a donc pour affixe $\alpha = 1 + \text{i}$.
Il est clair que les diagonales ont toutes les deux pour milieu $\Omega(1)$; les diagonales se coupent en leur milieu, donc $AOCB$ est un **parallélogramme**.

Soit $Z = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1+\text{i}}{1-\text{i}} = \dfrac{(1+\text{i})^2}{2} = \dfrac{2\text{i}}{2} = \text{i}$.

$|Z| = \dfrac{OA}{OB} = |\text{i}| = 1$ donc $OA = OB$: $OACB$ est donc un **losange**.

$\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\,\overrightarrow{\text{OB}}\right) = \arg(Z) = \arg(\text{i}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc le losange $OACB$ a un angle droit : c'est un **carré**.

3. Soit f l'application de $\mathscr{P}$ privé du point C dans $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe z, $(z \neq 2)$, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z - (1+i)}{z-2}.$$

a. $f(A)$ a pour affixe $z'_A = \dfrac{\alpha - (1+i)}{\alpha - 2} = \dfrac{(1+\text{i}) - (1+\text{i})}{1 + \text{i} - 2} = 0$ donc $\boxed{f(A) = O}$.

$f(B)$ a pour affixe $z'_B = \dfrac{\beta - (1+i)}{\beta - 2} = \dfrac{(1-\text{i}) - (1+\text{i})}{1 - \text{i} - 2} = \dfrac{-2\text{i}}{-1-\text{i}} = \dfrac{2\text{i}}{1+\text{i}} = \dfrac{2\text{i}(1-\text{i})}{2} = 1 + \text{i} = \alpha$ donc $\boxed{f(B) = A}$.

On cherche le point E tel que f(E) = C ; son affixe z est telle que $\dfrac{:}{z-(1+\text{i}}z - 2 = 2 \iff z - 1 - \text{i} = 2z - 4 \iff$ $-1 - \text{i} + 4 = z \iff 3 - \text{i} = z$.
E a donc pour affixe : $\boxed{z_E = 3 - \text{i}}$

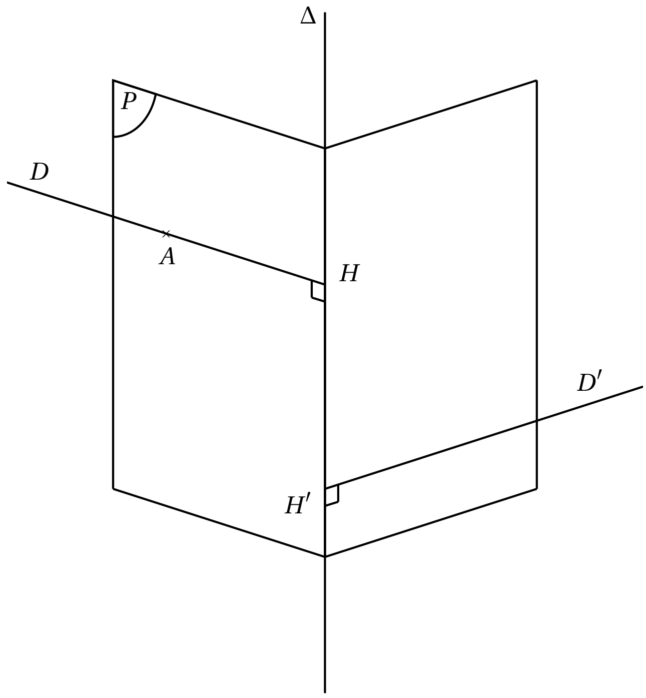
b. • $|z - (1+\text{i})| = |z - \alpha| = \boxed{AM}$

- $|z-2| = |z - z_C| = \boxed{CM}$

On suppose que M appartient à la médiatrice de $[AC]$ donc $AM = CM$.
$OM' = |z'| = \left|\dfrac{z-(1+i)}{z-2}\right| = \dfrac{|z-(1+\text{i})|}{|z-2|} = \dfrac{AM}{CM} = 1$ donc M' appartient au **cercle de centre O et de rayon 1**.

Exercice II

FIGURE



1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 1\times 1 - 3\times 0 + 1\times(-1) = \boxed{0}$, donc $\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}}$.

La droite Δ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u'}\,(-1~;~1;~-1)$ et $\overrightarrow{u'} \cdot \overrightarrow{w} = \boxed{0}$, donc $\boxed{\overrightarrow{u'} \perp \overrightarrow{w}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ dirigent respectivement D et D' et sont orthogonaux à $\overrightarrow{w}$ qui est donc un vecteur directeur de Δ.

2. **a.** $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 3-6+3 = \boxed{0}$ donc $\boxed{\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}}$;

de même, $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{w} = 3-3 = \boxed{0}$ donc $\boxed{\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{w}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ n'étant pas pas colinéaires, ils forment une base du plan P, et le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc **normal** à ce plan.

b. $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$. Une équation cartésienne de P est donc : $\boxed{3x+2y+3z+d=0}$, où d est un réel à déterminer. Comme $A(3~;~-4~;~1) \in \mathscr{P}$, on a : $3\times 3 + 2\times(-4) + 3\times 1 + d = 0$, d'où $d = -4$. Une équation cartésienne de P est donc : $\boxed{3x+4y+3z-4=0}$.

3. **a.** H' est un point de D', il existe donc un réel t tel que $H'(-1-t~;~2+t~;~1-t)$. Par ailleurs $H' \in \mathscr{P}$, donc $3(-1-t)+4(2+t)+3(1-t)-4=0$, d'où, en développant, $-4t=0$ puis $t=0$, ce qui donne $\boxed{H'(-1~;~2~;~1)}$.

b. La droite Δ passe par $H'(-1~;~2~;1)$ et est dirigée par $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+s \\ y &=& 2 \qquad (s\in\mathbb{R}) \\ z &=& 1-s \end{array}\right.}$$

4. **a.** $H \in D$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{u}$, d'où l'on déduit $H(3+\lambda\ ;\ -4-3\lambda\ ;\ 1+\lambda)$. De plus H est un point commun aux droites D et Δ, il existe donc une valeur de s et une valeur de λ telles que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -1+s & = & 3+\lambda \\ 2 & = & -4-3\lambda \\ 1-s & = & 1+\lambda \end{array}\right.$$

La deuxième équation donne $\lambda = -2$ et les deux autres donnent alors $s = 2$; on en déduit que $\boxed{H(1\ ;\ 2\ ;\ -1)}$.

b. $HH' = \sqrt{(-1-1)^2+(2-2)^2+(1+1)^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$.

5. **a.** D'après la **relation de Chasles**, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'}$. Posons $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}$, alors $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{HH'} = 0$ car $(MH) \perp (HH')$ et $(H'M') \perp (HH')$.

b. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{v}$, donc $\left(\overrightarrow{MM'}\right)^2 = \left(\overrightarrow{HH'}\right)^2 + 2\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^{\,2}$;

comme $\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, il reste $MM' = HH'^2 + \left|\left|\overrightarrow{v}\right|\right|^2$, d'où : $\boxed{MM'^2 \geqslant HH'^2}$.

La plus petite distance possible entre deux points de D et de D' est donc obtenue pour les points H et H'.

La distance entre les droites D et D' est donc égale à $\boxed{2\sqrt{2}}$.

Exercice III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \left(x^2+2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$.

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - \left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. • Limite en $-\infty$: Pour $x \neq 0$, $x^2-2x+2 = x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right) = 1$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^{-x} = +\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$

• Limite en $+\infty$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 2\times\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}$.

D'après les formules de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ pour n entier naturel non nul, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$.

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to=\infty} g(x) = 1}$.

2. g est dérivable comme somme, produit et composée de fonctions dérivables.

$g'(x) = -\left[(2x-2)\mathrm{e}^{-x} + (-1)\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^{-x}\right] = -\left(2x-2-x^2+2x-2\right)\mathrm{e}^{-x} = -\left(-x^2+4x-4\right)\mathrm{e}^{-x}$

$= \left(x^2-4x-4\right)\mathrm{e}^{-x} = \boxed{(x-2)^2\mathrm{e}^{-x}}$.

$g'(x) > 0$ pour $x \neq 2$ et $g'(2) = 0$.

3. Puisque $g'(x) \geqslant 0$, g est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$	$\nearrow$	1

4. • g est continue sur $\mathbb{R}$ comme comme, produit et compose de fonctions continues.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ (donc $g(x)$ prend des valeurs négatives).

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ donc $g(x)$ prend des valeurs positives.
  D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution.
  Comme g est croissante sur $\mathbb{R}$, cette solution est **unique** : on la note α.
  $g(0,35) \approx -0.0024 < 0$ et $g(0,36) \approx 0.017 > 0$ donc $\boxed{0,35 < \alpha < 0,36}$

5. **Signe de g :**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie II : Étude de f

On a $f(x) = x - 1 + \left(x^2 + 2\right) e^{-x}$.

1. • **Limite en $-\infty$** : On a $f(x) = e^{-x}\left[xe^x - e^x + x^2 + 2\right]$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ d'après les **croissances comparées**.
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + 2\right) = +\infty$.
Par produit, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.

Limite en $+\infty$:
$f(x) = x - 1 + \dfrac{x^2}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ (**croissances comparées**) et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{e^x}\right) = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + 2xe^{-x} + \left(x^2 + 2\right) \times (-1)e^{-x} = 1 + \left(2x - x^2 - 2\right) e^{-x} = 1 - \left(x^2 - 2x + 2\right) e^{-x} = \boxed{g(x)}$.

3. $f'(x)$ a donc le signe de $g(x)$.
On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x) = g(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

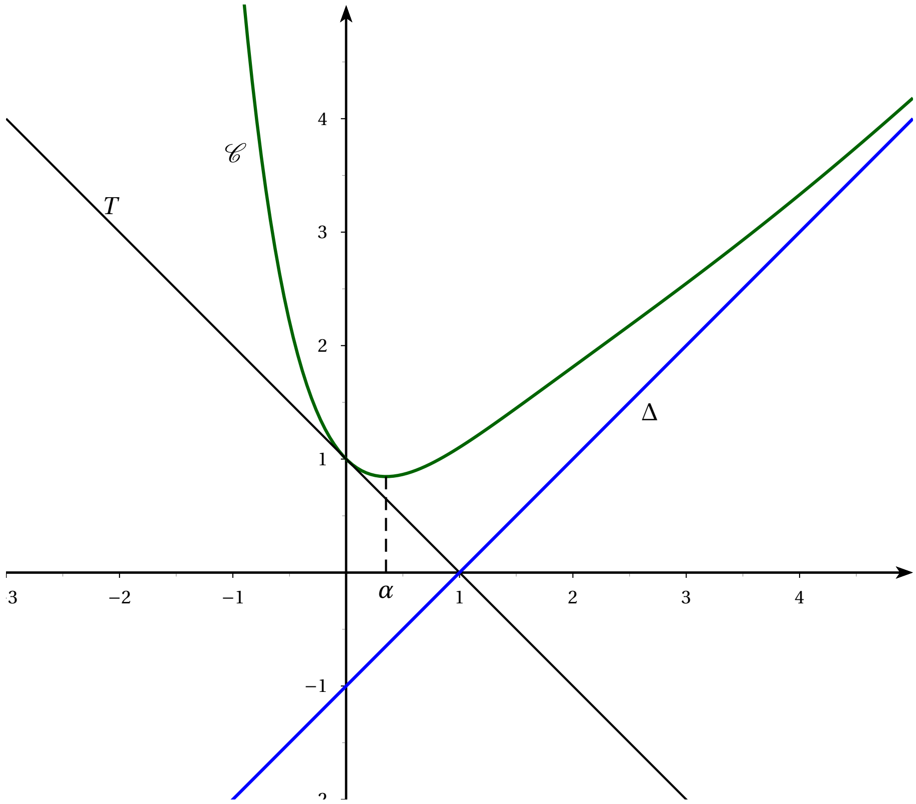
4. **a.** Par définition de α, on a : $1 - \left(\alpha^2 - 2\alpha + 1\right) e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{e^\alpha} \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 2 = e^\alpha$
$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2 = e^\alpha - 2\alpha$.
$f(\alpha) = \alpha - 1 + \dfrac{\alpha^2 + 2}{e^\alpha} = \alpha - 1\left(e^\alpha + 2\alpha\right) e^{-\alpha} = \alpha - 1 + 1 + 2\alpha e^{-\alpha} = \alpha - 2\alpha e^{-\alpha} = \boxed{\alpha\left(1 + 2e^{-\alpha}\right)}$

b. On pose $h(x) = x\left(1 + 2e^{-x}\right)$.
$h'(x) = 1 + 2e^{-x} + x \times 2 \times (-1)e^{-x} = 1 + 2(1 - x)e^{-x}$.
Il est clair que $h'(x) > 0$ sur $[0\ ;\ 1]$ donc h est croissante sur cet intervalle.
Comme $0,35 < \alpha < 0,35$, on a $h(0,35) < h(\alpha) < h(0,36)$.
$h(0,35) \approx 0,84328$ et $h(0,36) \approx 0,86233$.
On en déduit que $\boxed{0,84 < f(\alpha) < 0,87}$.

5. La tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow \boxed{y = -x + 1}$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (x - 1) = \left(x^2 + 2\right) e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$.
On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x - 1)\right] = \boxed{0}$ (limites déjà vues).

7. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$, la doite Δ d'équation $y = x - 1$ est **asymptote** à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
$f(x) - (x - 1) = \left(x^2 + 2\right) e^{-x} > 0$ donc $\mathscr{C}$ est **au-dessus** de son asymptote Δ.
Voilà la courbe, **non demandée** :



Exercice IV

Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

a. f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables.

$\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2}\right) = \boxed{\dfrac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}}.$

$f'(x) = 0$ pour $x = -\sqrt{2} \notin]0\,;\,+\infty[$ ou $x = \sqrt{2} \in]0\,;\,+\infty[$.

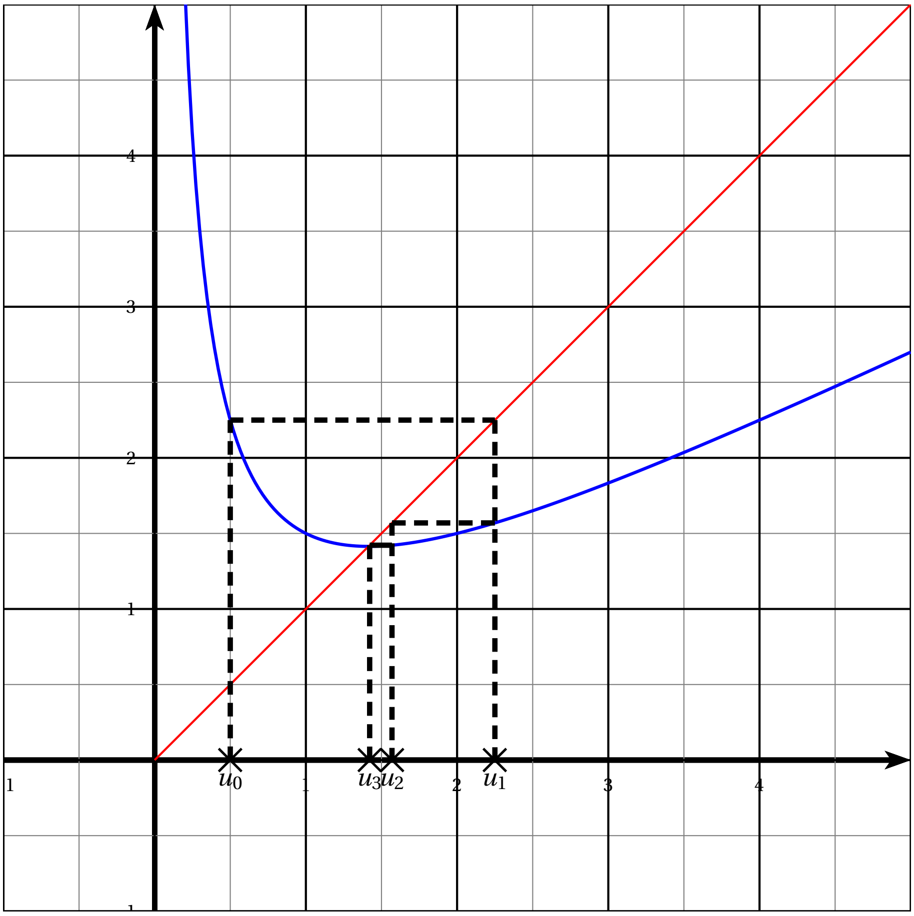
$f'(x)$ est du signe du numérateur, trinôme du second degré, qui est positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

Il est clair que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Tableau de variations :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Graphique :



b. Voir graphique.

2. **a.** Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

- Initialisation : $u_1 = \dfrac{9}{4} \geqslant \sqrt{2}$ donc $u_1 \geqslant \sqrt{2}$.
- Hérédité : on suppose que $u_n \geqslant \sqrt{2}$ pour un entier $n \geqslant 1$.
  Sur $\left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$, f est croissante, donc conserve l'ordre :
  $u_n \geqslant \sqrt{2} \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) \geqslant f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$ donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$.

b. Pour $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) - x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right) - x = \dfrac{x^2+2}{2x} - x = \dfrac{x^2+2-2x^2}{2x} = \dfrac{2-x^2}{2x} \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant 0$.

c. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$; or, pour $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) < x$ donc $f(u_n) < u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.
La suite (u_n) est donc décroissante.

d. La suite (u_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{2}$ à partir de $n = 1$, donc convergente.

3. **a.** f est continue, donc la limite ℓ est solution de l'équation $x = f(x)$ donc $x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

b. Cette équation a pour solutions $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
Comme $\ell > 0$, on en déduit que $\boxed{\ell = \sqrt{2}}$