Correction du bac blanc (mars 2014)

I

Partie A

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle : $\boxed{g'(x) = \mathrm{e}^x - 1}$.
   $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1$
   $\iff x > 0$ (par croissance de la fonction ln) .
   Conclusion : $g'(x) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$, donc la fonction g est croissante sur cet intervalle.
2. On a $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.
   La fonction étant croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on a, quel que soit x, $g(x) \geqslant g(0)$, donc $\boxed{g(x) \geqslant 0}$.
3. On vient de démontrer que pour tout réel de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
   $g(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x - x > 1$.

Partie B

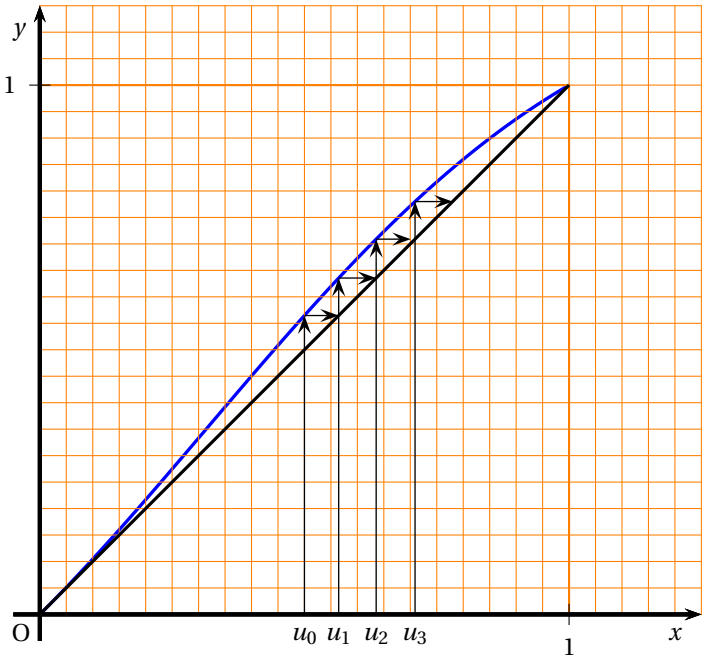
1. On a $f(0) = \dfrac{1-1}{1} = 0$ et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1} = 1$.
   Comme la fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant x \leqslant \Rightarrow$
   $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \iff \boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant 1}$.
2. (a) $f(x) - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^x - x}$
   $= \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + x^2 - 1}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + (x+1)(x-1)}{\mathrm{e}^x - x}$
   $= \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) - (x+1)(1-x)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{(1-x)\left(\mathrm{e}^x - x - 1\right)}{\mathrm{e}^x - x}$
   $= \boxed{\dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}}$.

   (b) La position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0\,;\,1]$ est donnée par le signe de la différence précédente : $f(x) - x$. Or on a vu sur $[0\,;\,1]$, $g(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0$. Comme de plus $1 - x > 0$, tous les termes du quotient sont positifs, donc $f(x) - x \geqslant 0$, ce qui signifie que la courbe $(\mathscr{C})$ est **au dessus** de la droite (D).

Partie C

1. Voir à la fin de l'exercice. .
2. Démontrons par récurrence sur n que : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   - ***Initialisation*** : On a vu que sur $[0\,;\,1]$, $f(x) - x \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant x$.
     On en déduit que $f(u_0) \geqslant u_0$ et $f(u_0) \leqslant 1$ car pour $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\,;\,1]$.
     On a donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.
   - ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :
     $\dfrac{1}{2} \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$ par croissance de la fonction f sur $[0\,;\,1]$:
     $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f\left(u_p\right) \leqslant f\left(u_{p+1}\right) \leqslant f(1)$
     $\iff u_1 \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 1$
     et comme $u_1 > u_0 = \dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 1$.

   On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n, $\boxed{\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1}$.
3. On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante et elle est majorée par 1.
   Elle converge donc vers un réel $\ell \leqslant 1$.
   Or f est continue, donc comme $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient par continuité $\ell = f(\ell)$ qui a pour solution dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$ le nombre 1.
   Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

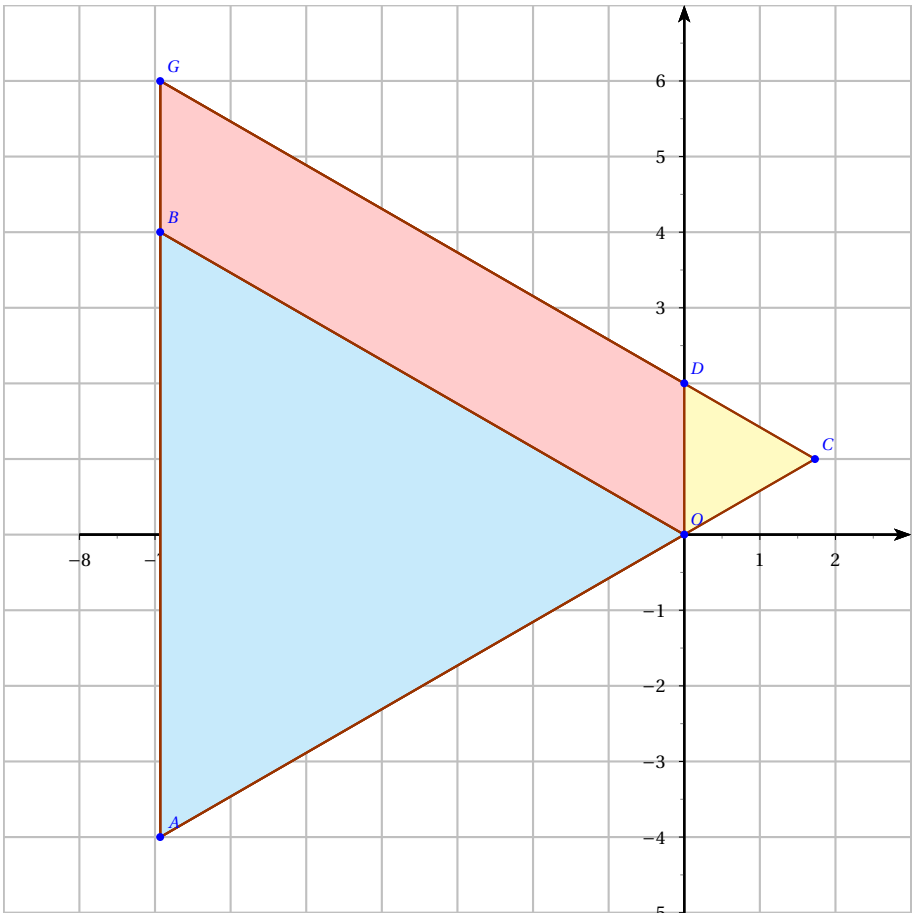


II

Le plan est rapporté à un repè re orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

1. Résolvons l'équation $z^2+8z\sqrt{3}+64=0$.
   $\Delta=\left(8\sqrt{3}\right)^2-4\times 64=64\times 3-64\times 4=64\times(3-4)=-64<0$.
   L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées.
   $z_1=\dfrac{-8\sqrt{3}-8\mathrm{i}}{2}=-4\sqrt{3}-4\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=-4\sqrt{3}+4\mathrm{i}$.
   $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-4\sqrt{3}-4\mathrm{i}\,;\,-4\sqrt{3}+4\mathrm{i}\right\}}$
2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a=-4\sqrt{3}-4\mathrm{i}$ et $b=-4\sqrt{3}+4\mathrm{i}$.
   - OA $=|a|=\left|-4\sqrt{3}-4\mathrm{i}\right|=|-4|\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=4\times 2=\boxed{8}$.
   - OB $=|b|=\left|\overline{a}\right|=|a|=OA$ (car, pour tout z, $\left|\overline{z}\right|=|z|$).
   - AB $=8$ (évident, puisque les deux points ont même abscisse !)
   - On en déduit que le triangle OAB est **équilatéral**
3. On désigne par C le point d'affixe $c=\sqrt{3}+\mathrm{i}$.
   D est le point d'affixe d où D est tel que OD = OC et $\left(\overrightarrow{OC}\,;\,\overrightarrow{OD}\right)=\dfrac{\pi}{3}$..
   (a) $\left|\dfrac{d}{c}\right|=\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OC}}=1$ car OD = OC et $\arg\left(\dfrac{d}{c}\right)=\left(\overrightarrow{OC}\,;\,\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.
   On en déduit que $\boxed{\dfrac{d}{c}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$.
   (b) On en déduit que $d=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(\sqrt{3}+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$:
   $\boxed{d=2\mathrm{i}}$.
4. On appelle G le point tel que $-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$.
   (a) $-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}\Leftrightarrow -g+d+b=0$
   $\Leftrightarrow g=b+d=-4\sqrt{3}+6\mathrm{i}$. $\boxed{g=-4\sqrt{3}+6\mathrm{i}}$.
   (b) Figure en dessous de l'exercice.
   (c) On obtient facilement que : $z_{\overrightarrow{BG}}=z_{\overrightarrow{OD}}=2\mathrm{i}$ donc $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{OD}$.
   OBGD est un **parallélogramme**.
5. (a) $\dfrac{c-g}{a-g}=\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}-\left(-4\sqrt{3}+6\mathrm{i}\right)}{-4\sqrt{3}-4\mathrm{i}-\left(-4\sqrt{3}+6\mathrm{i}\right)}=\dfrac{5\sqrt{3}-5\mathrm{i}}{-10\mathrm{i}}$
   $=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right)\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$
   $=\boxed{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}}$. car $\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$ donc $-\dfrac{1}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}$.
   (b) $\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}},\,\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)=\arg\left(\dfrac{c-g}{a-g}\right)=\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$.
   $\dfrac{\mathrm{GC}}{\mathrm{GA}}=\left|\dfrac{c-g}{a-g}\right|=1$ donc $\boxed{\mathrm{GC}=\mathrm{GA}}$.
   Le triangle AGC est isocèle en G avec un angle au sommet égal à $\dfrac{\pi}{3}$, donc il est **équilatéral**.

Figure :



III

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc $\boxed{-\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}\sin x \leqslant \mathrm{e}^{-x}}$ car $\mathrm{e}^{-x} > 0$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$.
   De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$.
   D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
   On en déduit que l'axe des réels est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
2. f est dééirvable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
   $f = uv$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = \sin x$.
   $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ car $u = \mathrm{e}^{w}$ avec $w(x) = -x$ et $\left(\mathrm{e}^{w}\right)' = w'\mathrm{e}^{w}$.
   $v'(x) = \cos x$.
   $f' = u'v + v'u$ donc :
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \mathrm{e}^{-x}\cos x = (cos x - \sin x)\mathrm{e}^{-x} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)\mathrm{e}^{-x} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)\mathrm{e}^{-x}$
   $= \boxed{\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{e}^{-x}}$.
3. On étudie la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.
   Recopier et compléter le tableau suivant :

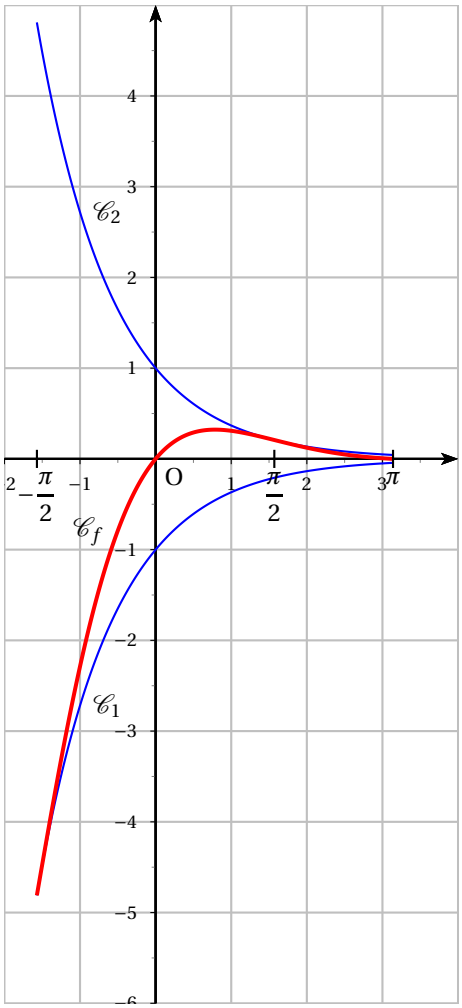
Valeur de x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	π
Valeur de $x + \frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$
Signe de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	$+$	0	$-$

   Comme $\sqrt{2}$ et e^{-x} sont strictement positifs, $f'(x)$ est du signe de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
   On en déduit le tableau de variation de f :

Valeur de x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	≈ -1.55	↗	$\approx 0,32$	↘	0

4. Courbe à la fin de l'exercice
5. Déterminer algébriquement sur $\mathbb{R}$, puis sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, les coordonnées des points communs à :
   (a) $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses.
   On résout sur l'équation $f(x) = 0$.
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ car $\mathrm{e}^{-x} > 0$.
   On obtient $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   Dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, on obtient $x = 0$ et $x = \pi$:
   $\boxed{\mathscr{S} = \{0\,;\,\pi\}}$.
   (b) $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_1)$.
   On résout l'équation $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
   $f(x) = -\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}\sin x = -\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \sin x = -1$ (car $\mathrm{e}^{-x} > 0$).
   On obtient $\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$.
   Dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$: $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}}$
   (c) $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_2)$.
   On résout l'équation $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}\sin x = -\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \sin x = 1$ (car $\mathrm{e}^{-x} > 0$).
   ON obtient : $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$.
   Dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$: $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}}$

Courbe :



Exercice IV pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

1. (a) $u_1 = \left(1+\frac{2}{1}\right)u_0 + \frac{6}{1} = 3\times 5+6 = \boxed{21}$.

   (b) On obtient : $d_1 = u_1 - u_0 = \boxed{16}$, $d_2 = u_2 - u_1 = \boxed{24}$, puis $d_3 = \boxed{32}$, $d_4 = \boxed{40}$, $d_5 = \boxed{48}$.

   On peut donc conjecturer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** de raison 8 et de premier terme 16.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   On sait que, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = 16+8n = 8(n+2)$.
   La somme S_n des n premiers termes est :
   $S_n = (\text{Nombre de termes}) \times \dfrac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2} = n\times\dfrac{v_0+v_{n-1}}{2} = n\times\dfrac{16+16+8(n-1)}{2} = n\times\dfrac{24+8n}{2} = n(12+4n)$
   $= \boxed{4n^2+12n}$..

3. Démonstrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = 4n^2+12n+5$
   — **Initialisation** : $u_0 = 5$: vrai

   — **Hérédité** : supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n = 4n^2+12n+5$.
   Alors $u_{n+1} = \left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)u_n + \dfrac{6}{n+1} = \left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)\left(4n^2+12n+5\right) + \dfrac{6}{n+1}$.
   Or $4n^2+12n+5 = 4(n+1)^2 - 8n - 4 + 12n + 5 = 4(n+1)^2 + 4n + 1 = 4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3$.
   En reportant dans u_{n+1} au dessus, on obtient :
   $u_{n+1} = \left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)\left[4(n+1)^2+4(n+1)-3\right] + \dfrac{6}{n+1} =$
   $4(n+1)^2+4(n+1)-3+8(n+1)+8-\dfrac{6}{n+1}+\dfrac{6}{n+1} = 4(n+1)^2+12(n+1)+5$.
   La relation est donc vraie au rang $n+1$; la propriété est héréditaire.

   Autre méthode :
   $u_{n+1} = \left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)\left[4(n+1)^2+4(n+1)-3\right] + \dfrac{6}{n+1} = \dfrac{(n+3)\left(4n^2+12n+5\right)+6}{n+1} = \dfrac{4n^3+24n^2+41n+21}{n+1}$
   $= \dfrac{(n+1)\left(4n^2+20n+21\right)}{n+1} = 4n^2+20n+21 = 4\left(n^2+2n+1\right)+12n+17 = 4(n+1)^2+12n+17$
   $= \boxed{4(n+1)^2+12(n+1)+5}$

   Conclusion : on vient de démontrer par récurrence que, quel que soit $n\in\mathbb{N}$,
   $u_n = 4n^2+12n+5$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$, $\quad$ d'après les questions précédentes, on déduit que :
   $d_n = u_{n+1} - u_n = 4(n+1)^2+12(n+1)+5-\left(4n^2+12n+5\right) = 4n^2+8n+4+12n+12-4n^2-12n-5 = \boxed{8n+16 = v_n}$.

   Conclusion : la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** de raison 8 et de premier terme $d_0 = 16$.