# Corrigé du bac blanc (mars 2011)

## Exercice 1

1. **Proposition 1 :** $\boxed{\text{Vraie}}$

   **Première méthode :**
   Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$,
   donc $t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.
   En écrivant cette égalité pour $n = 0,\ 1,\ n$, on obtient :
   $t_1 = 0 + \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}$
   $t_2 = t_1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$
   $\ldots = \ldots\ldots$
   $t_n = t_{n-1} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, soit par somme membres à membres et simplifications :
   $t_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

   **Deuxième méthode :** démonstration par récurrence.
   Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition ; $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.

   - **Initialisation :** $t_0 = 0 = \dfrac{0}{0+1}$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie à un rang $n$ quelconque, donc $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.
     Alors : $t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$
     $= \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$
     $= \dfrac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$ donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n$ : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{t_n = \dfrac{n}{n+1}}$.

2. **Proposition 2 :** $\boxed{\text{Vraie}}$
   Les suites $(u_n)$et $(v_n)$ sont adjacentes : elles convergent et ont la même limite $\ell$.
   Comme $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$, d'après le théorème des « gendarmes », la suite $(w_n)$ converge vers la même limite $\ell$.

3. **Proposition 3 :** $\boxed{\text{Fausse}}$
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right] = \lim\limits_{X\to 0}(\ln(X)) = -\infty$ donc la suite **diverge**.

## Exercice 2

### Partie 1

1. On a $g(x) = \mathrm{e}^x(1-x)+1$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$, donc par produit des limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$.

2. La fonction $g$ est somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$, donc est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ :
   $g'(x) = \mathrm{e}^x(1-x) - \mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$. $g'(x) = -x\mathrm{e}^x$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $x > 0$, on a $g'(x) < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   $g$ est donc **décroissante** sur $[0\,;\,+\infty[$, et prend ses valeurs dans $]-\infty\,;\,2]$.

3. Tableau de variations de $g$ :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | | |
| $g(x)$ | $2$ | $-\infty$ |

4. (a) Sur $[0\,;\,+\infty[$, $g$ continue comme produit et composée de fonctions continues et décroissante, $g(0) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
   D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe donc un réel unique appartenant à $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

   (b) La calculatrice donne :
   - $g(1) = 1$ et $g(2) \approx -6,4$, donc $1 < \alpha < 2$ ;
   - $g(1,2) \approx 0,3$ et $g(1,3) \approx -0,1$, donc $1,2 < \alpha < 1,3$ ;
   - $g(1,27) \approx 0,04$ et $g(1,28) \approx -0,007$, donc $\boxed{1,27 < \alpha < 1,28}$.

   (c) On a $g(\alpha) = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha)+1 = 0$
   $\iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff \boxed{\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}}$.

5. On en déduit :
   - $g(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$ ;
   - $g(\alpha) = 0$ ;
   - $g(x) < 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

### Partie 2

1. La fonction $A$ quotient de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas) est dérivable et sur cet intervalle :
   $A'(x) = \dfrac{4\left(\mathrm{e}^x+1\right) - 4x\times\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \dfrac{4\left(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$
   $= \boxed{\dfrac{4g(x)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}}$.
   Comme $\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2 > 0$ quel que soit $x$, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.
   D'après la précédente question on a donc :
   - $A'(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$ ;
   - $A'(\alpha) = 0$ ;
   - $A' < 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

2. $A$ est donc croissante sur $[0~;~\alpha[$ et décroissante sur $[\alpha~;~+\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

**Partie 3**

1. On sait que $x \geqslant 0$, donc l'aire du rectangle O$PMQ$ est égale à $\boxed{x \times f(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x+1} = A(x)}$.
   Or on a vu que la fonction présente un maximum pour $x = \alpha$.
2. Le coefficient directeur de la droite $(PQ)$ est égal à $-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = -\dfrac{\frac{4}{\mathrm{e}^\alpha+1}}{\alpha} = -\dfrac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^\alpha+1\right)}$.
   Or on a vu que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$, donc le coefficient directeur est égal à :
   $-\dfrac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^\alpha+1\right)} = -\dfrac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha(1+\alpha-1)}$
   $= \boxed{-\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}}$.
   La tangente en $M(\alpha~;~f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.
   Or $f'(x) = -\dfrac{4\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$, donc
   $f'(\alpha) = -\dfrac{4\mathrm{e}^\alpha}{\left(\mathrm{e}^\alpha+1\right)^2} = -\dfrac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{(1+\alpha-1)^2} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.
   Les coefficients directeurs sont égaux : **les droites sont parallèles**.

## Exercice 3

Soit $\varphi$ la fonction définie sur $[1~;~+\infty[$ par $\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln x$.

1. (a) $\varphi$ es dérivable sur $[1~;~+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables.
   $\forall x \in [1~;~+\infty[$, $\varphi(x) = 1 + x^2 - 2 \times x^2 \ln x$ donc $\varphi'(x) = 2x - 2 \times \left(2x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x}\right)$
   $= 2x - 2\left(2x\ln x + x\right) = -4x\ln x$.
   Sur $[1~;~+\infty[$, $x > 0$ et $\ln x \geqslant 0$ donc $\varphi'(x) \leqslant 0$.
   On en déduit que $\varphi$ est **décroissante** sur $[1~;~+\infty[$.

   (b) $\varphi(\mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2\ln\mathrm{e} = 1 + \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2 = 1 - \mathrm{e}^2 < 0$.
   Sur $[1~;~+\infty[$, $\varphi$ est continue, $\varphi(1) = 2 > 0$ et $\varphi(\mathrm{e}) < 0$ ; d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet (au moins) une solution sur cet intervalle. Comme $\varphi$ est strictement décroissante, cette solution est unique. Notons-la $\alpha$.
   À la calculatrice, on trouve : $\boxed{1{,}8 < \alpha < 1{,}9}$.

   (c) On en déduit le signe de $\varphi$ sur $[1~;~+\infty[$ :

   | $x$ | $1$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|
   | $\varphi(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

2. Soit $f$ la fonction définie sur $[1~;~+\infty[$ par :
   $$f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}.$$
   (a) $f$ est dérivable sur $[1~;~+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [1~;~+\infty[$,
   $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times \left(1+x^2\right) - 2x \times \ln x}{\left(1+x^2\right)^2}$
   $= \dfrac{\frac{1}{x}\left(1+x^2\right) - 2x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{1 + x^2 - 2x^2\ln x}{x\left(1+x^2\right)^2}$
   $= \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$. $\boxed{f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}}$.

   (b) Sur $[1~;~+\infty[$, $x > 0$ et $1 + x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$, donc $f'(x) \leqslant 0$ sur $[1~;~\alpha]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha~;~+\infty[$.
   Par conséquent : $f$ est croissante sur $[1~;~\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha~;~+\infty[$.

   (c) $\forall x \in [1~;~+\infty[$, $x^2 < 1 + x^2$ donc $\dfrac{1}{x+x^2} < \dfrac{1}{x^2}$ d'où, en multipliant par $\ln x \geqslant 0$ : $\boxed{0 \leqslant \dfrac{\ln x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}}$.

   (d) D'après le cours (croissances comparées), $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$.
   Alors, d'après le théorème des gendarmes, on a : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

## Exercice 4 (non spécialité)

$z_A = -2i$ ; $z_B = -\sqrt{3}+i$ ; $z_C = \sqrt{3}+i$.

1. (a) $z_A = -2i = 2\times(-i) = \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$.

$|z_B| = |-\sqrt{3}+i| = 2$ : alors $z_B = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$.

B et C sont symétriques par rapport à l'axe $(O\vec{v})$ donc : $z_C = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$.

(b) On en déduit : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$, c'est-à-dire $OA = OB = OC$.

Le cercle $\Gamma$ passant par A, B et C (circonscrit au triangle ABC) est donc le cercle de centre O et de rayon 2.

(c) Pour placer les points, on trace le cercle $\Gamma$.

A est facile à placer.

C a pour ordonnée 1, de même que B. Ils sont donc situés à l'intersection de la droite d'équation $y = 1$ et du cercle $\Gamma$. B est symétrique de C par rapport à l'axe des imaginaires purs.

**Figure à la fin de l'exercice**

2. (a) $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\sqrt{3}+i-(-2i)}{\sqrt{3}+i-(-2i)} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+3i} = \frac{(-\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-3i)}{\sqrt{3}^2+3^2} = \frac{-(\sqrt{3}-3i)^2}{12} = \frac{6+6\sqrt{3}i}{12} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(b) $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC} = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ donc $AB = AC$ ; le triangle ABC est donc isocèle en A.

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Comme ABC est isocèle en A avec un angle en A de $\frac{\pi}{3}$, **le triangle ABC est équilatéral**.

(a) $r$ a pour écriture complexe : $z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$ donc $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z+2i) - 2i = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z+2i) - 2i$.

On en déduit : $z_{O'} = 2i\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2i = \boxed{-\sqrt{3}-i}$.

(b) $z_{O'} = -z_C$ donc C et O' sont diamétralement opposés sur le cercle $\Gamma$ (puisqu'ils sont symétriques par rapport à O).

(c) Une rotation est une isométrie donc conserve les longueurs. L'image de $\Gamma$ est un cercle de rayon 2, et de centre l'image de $O$, donc $O'$. (voir figure).

(d) A est le centre de la rotation $r$ donc A est invariant par $r$. A appartient au cercle $\Gamma$, donc son image $r(A) = A$ appartient à l'image de $\Gamma$ par $r$, $\Gamma'$.

A appartient donc à $\Gamma$ et à $\Gamma'$.

De même, C appartient à $\Gamma$ ; son image par $r$, B, appartient donc à $r(\Gamma) = \Gamma'$ ; or B appartient aussi à $\Gamma$, donc B appartient à $\Gamma'$.

A et B appartiennent à $\Gamma$ et $\Gamma'$, donc les deux cercles se coupent en A et en B.

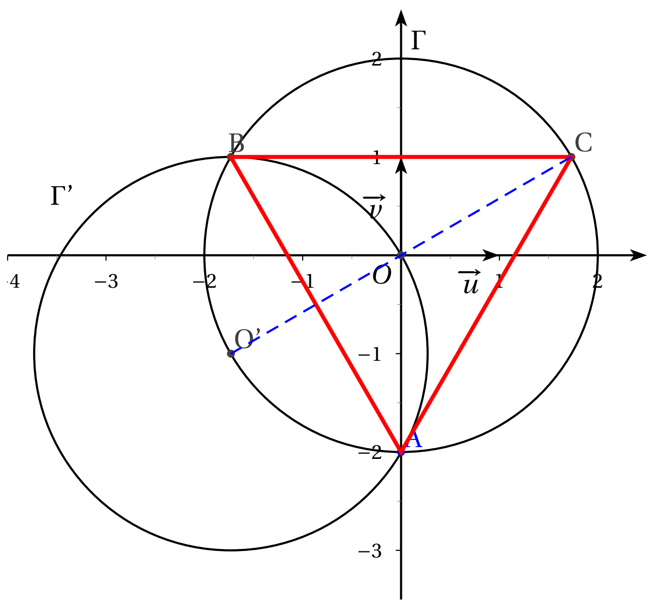
3. (a) Soit $M$ le point d'affixe $z$. $|z| = |z+\sqrt{3}+i| \Leftrightarrow |z-0| = |z-(-\sqrt{3}-i)| \Leftrightarrow OM = O'M$.

L'ensemble (E) est donc la médiatrice du segment [OO'].

(b) OA = 2 et C'A = 2 (rayons des deux cercles $\Gamma$ et $\Gamma'$), donc A est équidistant de O et de C' : A appartient à (E).

De même, OB = 2 et C'B = 2 (rayons des deux cercles $\Gamma$ et $\Gamma'$), donc B appartient ausi à (E).

$\boxed{\text{(E) est donc la droite (AB)}}$.



## Exercice 4 (spécialité)

Soit $A$ l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1\ ;\ 46]$.

1. On considère l'équation

$$(E):\quad 23x + 47y = 1$$

où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

(a) $(-2;1)$ est une solution de $(E)$ car
$-2 \times 23 + 1 \times 47 = 1$.

(b) $(x\ ;\ y)$ solution de $(E) \Rightarrow 23x + 47y = 1$
$\begin{cases} 23x + 47y & = & 1 \\ -2 \times 23 + 1 \times 47 & = & 1 \end{cases}$
$\overset{\text{par soustraction}}{\Rightarrow} \quad 23(x+2) + 47(y-1) = 0 \Rightarrow 23(x+2)$
$= 47(1-y)$
Donc 23 divise $47(1-y)$, mais 47 et 23 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 23 divise $1-y$
donc $y = 1 - 23k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
En remplaçant $1-y$ par $23k$, on a aussi :
$23(x+2) = 47 \times 23k \Longleftrightarrow x = 47k - 2$
L'ensemble des solutions de $(E)$ est l'ensemble des couples $(47k-2; 1-23k)$ où $k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{\mathscr{S} = \{(47k-2; 1-23k),\ k \in \mathbb{Z}\}}$

(c) $23x \equiv 1 \quad (47) \Leftrightarrow$ il existe $y \in \mathbb{Z}$, $23x = 1 - 47y \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$, $x = 47k - 2$ et $y = 1 - 23k$
De plus $x \in A \Leftrightarrow 1 \leqslant 47k - 2 \leq 46 \Leftrightarrow 3 \leqslant 47k \leqslant 48$.
Or un seul multiple de 47 se trouve dans cet encadrement, c'est 47. Donc $k = 1$ et $x = 45$.
Le seul entier $x$ appartenant à $A$ tel que
$23x \equiv 1 \quad (47)$ est $\boxed{45}$.

2. Soient $a$ et $b$ deux entiers relatifs.

(a) $ab \equiv 0 \quad (47) \Leftrightarrow 47$ divise $ab$.
Or 47 est un nombre premier, il apparait donc au moins dans l'une des deux décompositions de a ou de b.
D'où le résultat. (on peut aussi utiliser le théorème de Gauss).

(b) $a^2 \equiv 1 \quad (47) \Leftrightarrow a^2 - 1 \equiv 0 \quad (47)$
$\Leftrightarrow (a-1)(a+1) \equiv 0 \quad (47) \overset{2\text{a}}{\Rightarrow} a - 1 \equiv 0 \quad (47)$
ou $a + 1 \equiv 0 \quad (47) \cdots$

3. (a) Tout entier $p$ de $A$ est premier avec 47, donc le théorème de Bezout assure l'existence de $(q,\ s)$ entiers relatifs tels que $qp + 47s = 1$.
On a alors $p \times q \equiv 1 \quad (47)$.

(b) $p = inv(p) \Leftrightarrow p^2 \equiv 1 \quad (47) \overset{2\text{b}}{\Rightarrow} p \equiv -1 \quad (47)$ ou $p \equiv 1 \quad (47) \overset{p \in A}{\Rightarrow} p = 46$ ou $p = 1$
Réciproquement 1 et 46 conviennent bien.

(c) Pour tout entier p de A compris entre 2 et 45, il existe (d'après 3a) un entier de A **distinct** (d'après 3b) $inv(p)$ tel que $p \times\ inv(p) \equiv 1 \quad (47)$, donc $45! \equiv 1 \quad (47)$. On en déduit $46! \equiv 46 \quad (47)$ soit enfin $46! \equiv -1 \quad (47)$.

**Remarque** : cet exercice est un cas particulier du théorème de Wilson :
$\boxed{\text{Un entier } p \text{ est premier si, et seulement si, } (p-1)! \equiv -1 \mod p}$