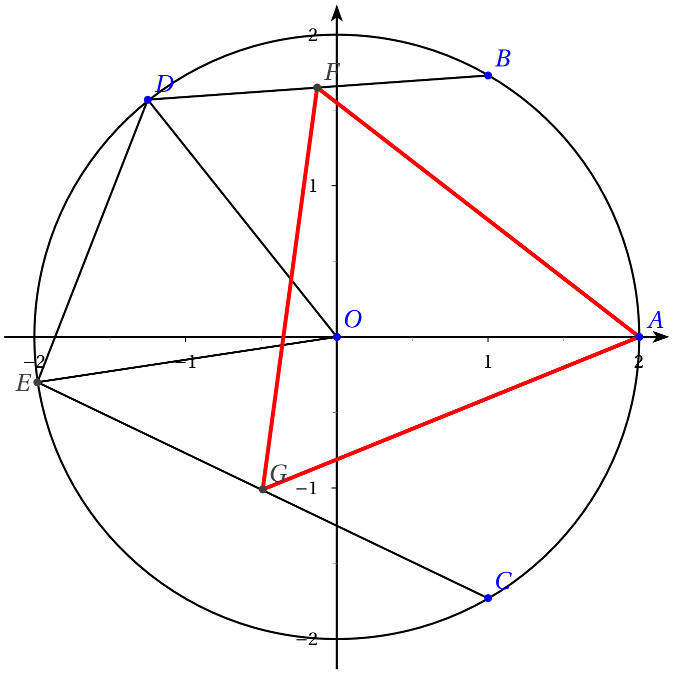
Correction du bac blanc de mars 2012

I



1. (a) $\alpha^2-4\alpha=\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2-4\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)=1-3+2\mathrm{i}\sqrt{3}-4-4\mathrm{i}\sqrt{3}=-6-2\mathrm{i}\sqrt{3}$
$2\overline{\alpha}-8=2\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)-8=-6-2\mathrm{i}\sqrt{3}=\alpha^2-4\alpha$, donc $\boxed{\alpha^2-4\alpha=2\overline{\alpha}-8}$

(b) Le cercle $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points M tels que $OM=OA=2$ c'est-à-dire $|z-z_0|=OA=2OB=|z_B-z_0|$
$=|\alpha|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$, donc $\boxed{B\in\mathscr{C}}$.
De même : $OC=|z_C-z_0|=|\overline{\alpha}|=|\alpha|=2$, donc $\boxed{C\in\mathscr{C}}$

(a) On trace le cercle de centre D et de rayon 2, il coupe le cercle C en deux points, E est le point tel que ODE est un triangle équilatéral direct.

(b) La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ a pour écriture complexe $z'-z_O=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_O)$ c'est-à-dire

$$\boxed{z'=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}z}$$

et donc l'image de $D\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ est E avec $z_E=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}e^{\mathrm{i}\theta}$.

Or $\alpha=1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Par conséquent : $\boxed{z_E=\alpha e^{i\theta}}$

(c) $z_F=\dfrac{z_B+z_D}{2}=\dfrac{\alpha+2e^{i\theta}}{2}=\dfrac{\alpha}{2}+e^{i\theta}$.

(d) On aurait de même : $z_G=\dfrac{z_C+z_E}{2}=\dfrac{\alpha e^{i\theta}+\overline{\alpha}}{2}$.

Alors : $\dfrac{z_G-2}{z_F-2}=\dfrac{\dfrac{\alpha e^{i\theta}+\overline{\alpha}}{2}-2}{\dfrac{\alpha}{2}+e^{i\theta}-2}=\dfrac{\alpha e^{i\theta}+\overline{\alpha}-4}{\alpha+2e^{i\theta}-4}=\dfrac{\alpha e^{i\theta}+\left(\dfrac{\alpha^2-4\alpha}{2}\right)}{\alpha+2e^{i\theta}-4}=\dfrac{\dfrac{2\alpha e^{i\theta}+\alpha^2-4\alpha}{2}}{\alpha+2e^{i\theta}-4}$
$=\dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha\left(e^{i\theta}+\alpha-4\right)}{\left(\alpha+2e^{i\theta}-4\right)}=\dfrac{\alpha}{2}$, car d'après 1 a) : $\overline{\alpha}-4=\dfrac{\alpha^2-4\alpha}{2}$.

Par conséquent : $\boxed{\dfrac{z_G-2}{z_F-2}=\dfrac{\alpha}{2}}$

(e) $\left|\dfrac{z_G-2}{z_F-2}\right|=\left|\dfrac{z_G-z_A}{z_F-z_A}\right|=\dfrac{AG}{AF}=\left|\dfrac{\alpha}{2}\right|=\dfrac{|\alpha|}{2}=\dfrac{2}{2}=1$; donc $\boxed{AG=AF}$
$\left(\overrightarrow{AF}\,;\,\overrightarrow{AG}\right)=\arg\left(\dfrac{z_G-2}{z_F-2}\right)=\arg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\arg(\alpha)=\dfrac{\pi}{3}$ (car $\alpha=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$). Le triangle AFG a deux côtés de même longueur et un angle de $\dfrac{\pi}{3}$, donc il est **équilatéral**.

2. On a : $AF^2=4-3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$.
Les variations de la fonction f définie par $f(x)=4-3\cos x+\sqrt{3}\sin x$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$ sont :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f	7	↘	$4-2\sqrt{3}$	↗	$4+2\sqrt{3}$	↘	7

AF^2 est minimum, donc AF aussi pour $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ et la valeur minimum de AF vaut $\boxed{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$. (car $4-2\sqrt{3}<7$)

Remarque : $4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$, donc $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\boxed{\sqrt{3}-1}$.

II

Partie A

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle : $\boxed{g'(x)=\mathrm{e}^x-1}$.
$\mathrm{e}^x-1>0 \iff \mathrm{e}^x>1 \iff x>0$. (par croissance de la fonction ln)
Conclusion : $g'(x)>0$ sur $[0\,;\,+\infty[$, donc la fonction g est **croissante** sur cet intervalle.

2. On a $g(0)=1-0-1=0$.
La fonction étant croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on a, quel que soit x, $g(x)\geqslant g(0)$, donc $\boxed{g(x)\geqslant 0}$.

3. On vient de démontrer que pour tout réel de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
$g(x)\geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x-x-1>0 \iff \boxed{\mathrm{e}^x-x>1}$.

Partie B

1. On a $f(0)=\dfrac{1-1}{1}=0$ et $f(1)=\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1}=1$.
Comme la fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$, $0\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(1) \iff \boxed{0\leqslant f(x)\leqslant 1}$.

2. (a) $f(x) - x = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \dfrac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x} = \dfrac{e^x(1-x) + x^2 - 1}{e^x - x} = \dfrac{e^x(1-x) + (x+1)(x-1)}{e^x - x} = \dfrac{e^x(1-x) - (x+1)(1-x)}{e^x - x}$
$= \dfrac{(1-x)\left(e^x - x - 1\right)}{e^x - x} = \boxed{\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}}$.

(b) La position relative de la droite (D) et de la courbe ($\mathscr{C}$) sur $[0;1]$ est donnée par le signe de la différence précédente : $f(x) - x$. Or on a vu sur $[0;1]$, $g(x) \geqslant 0$ et $e^x - x \geqslant 1 > 0$. Comme de plus $1 - x > 0$, tous les termes du quotient sont positifs, donc $f(x) - x \geqslant 0$, ce qui signifie que **la courbe ($\mathscr{C}$) est au dessus de la droite (D)**.

Partie C

1. Voir à la fin de l'exercice.
2. *Initialisation* : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et comme f est croissante sur $[0;1]$, $u_1 = f(u_0) > u_0$.

   On a donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

   Hérédité : Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$.

   Par croissance de la fonction f sur $[0;1]$: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f\left(u_p\right) \leqslant f\left(u_{p+1}\right) \leqslant f(1) \iff u_1 \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 1$

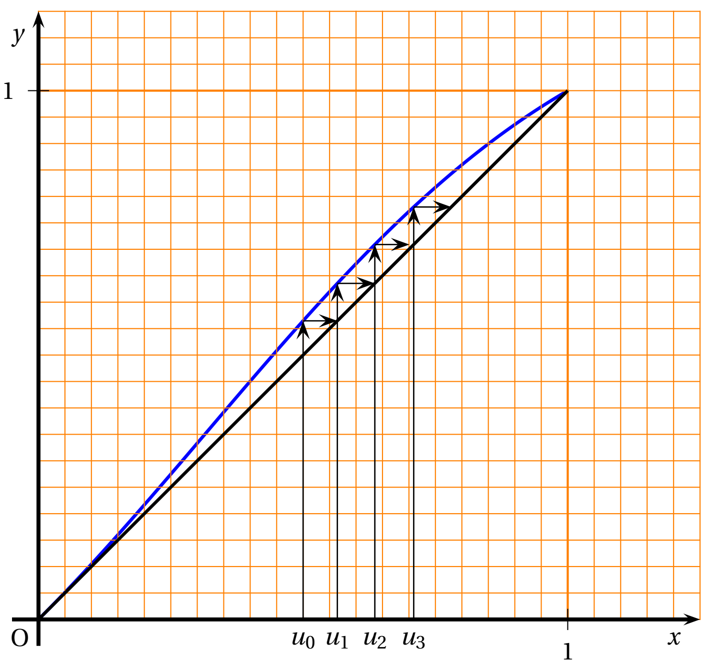
   et comme $u_1 > u_0 = \dfrac{1}{2}$, on a $\boxed{\dfrac{1}{2} \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 1}$.

   On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n, $\boxed{\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1}$.
3. On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante et elle est majorée par 1.

   Elle converge donc vers un réel $\ell \leqslant 1$.

   Or f est continue, donc comme $u_{n+1} = f(u_n)$, $\ell = f(\ell)$ qui a pour solution dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$ le nombre 1.

   Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$.



III

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. La fonction u est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout réel x strictement positif, $u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$. Pour tout réel x strictement positif, $u'(x) > 0$ comme somme de termes positifs (dont l'un est non nul), la fonction u est donc **strictement croissante**.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 2\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty}$.

   $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 - 2 = -2\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} u(x) = -\infty}$.
2. (a) La fonction u est continue sur $]0\,;\,+\infty[$, elle prend des valeurs positives (car $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$) et des valeurs négatives (car $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = -\infty$). Selon le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction u s'annule au moins une fois. Comme de plus, la fonction est strictement croissante, elle, ne s'annule qu'une seule fois. Donc l'équation $u(x) = 0$ **admet une solution unique** sur $]0\,;\,+\infty[$.

   On note α cette solution.

   (b) À l'aide de la calculatrice on remarque que $u(1{,}56) < 0 < u(1{,}57)$ donc $\boxed{1{,}56 < \alpha < 1{,}57}$
3. Puisque u est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, pour tout $x \in]0\,;\,\alpha[$, $u(x) < u(\alpha)$ donc $u(x) < 0$ et pour tout $x > \alpha$, $u(x) > u(\alpha)$ donc $u(x) > 0$
4. $u(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 2 + \ln(\alpha) = 0 \iff \boxed{\ln(\alpha) = 2 - \alpha^2}$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 2x + 2 \times (2 - \ln x) \times \dfrac{-1}{x} = \dfrac{2}{x}\left(x^2 - 2 + \ln x\right) = \boxed{\dfrac{2}{x}u(x)}$
2. $\dfrac{2}{x}$ étant toujours positif sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$, donc est strictement négative sur $]0\,;\,\alpha[$, et strictement positive sur $]\alpha\,;\,+\infty[$ et s'annule en α. la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ et atteint un minimum en α.

   $\lim\limits_{x \to =\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - \ln x)^2 = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

   $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 02$ et $\lim\limits_{x \to 0} (2 - \ln x)^2 = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} u(x) = +\infty}$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\,;\,2)$;

- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

1. Le point A a pour coordonnées $(0\,;\,2)$ et le point $\mathrm{M}(x\,;\,\ln x)$, donc
$AM = \sqrt{(x-0)^2+(\ln x-2)^2} = \sqrt{f(x)}$

2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \boxed{\sqrt{f(x)}}$.
   (a) La fonction $\sqrt{\ }$ étant strictement croissante sur son ensemble de définition, et la fonction f prenant des valeurs toujours positives, les fonctions f et $g=\sqrt{f}$ ont **même sens de variation**.
   (b) La fonction g atteint donc son minimum en α. La distance AM est donc minimale pour $x=\alpha$ soit au point $\mathrm{P}(\alpha\,;\,\ln\alpha)$. Or $\ln\alpha = 2-\alpha^2$ donc P a pour coordonnées $(\alpha\,;\,2-\alpha^2)$.
   (c) $\mathrm{AP} = \sqrt{(\alpha-0)^2+(2-\alpha^2-2)^2} = \sqrt{\alpha^2+\alpha^4} = \boxed{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}$ (car $\alpha>0$).

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La tangente à Γ en P a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{\alpha}$ et la droite AP a pour coefficient directeur $\dfrac{y_P-y_A}{x_P-x_A} = \dfrac{2-\alpha^2-2}{\alpha-0} = -\alpha$. Le produit des deux coefficients directeurs donne -1, la tangente Γ en P et la droite (AP) sont **perpendiculaires**.

IV Exercice pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, une seule réponse est exacte.
Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie.

Questions	Réponses
1. L'équation $\mathrm{e}^{x^2-\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$ a pour solutions	☐ 1
	☐ $\dfrac{1}{2}$
	☐ -1
	☐ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
	■ -1 et 1
2. L'inéquation $\ln(x)-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)<0$ a pour solutions :	☐ $\mathscr{S} =]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$
	■ $\mathscr{S} =]0\,;\,1[$
	☐ $\mathscr{S} =]-1\,;\,1[$
	☐ $\mathscr{S} =]-\mathrm{e}\,;\,-1[\cup]1\,;\,\mathrm{e}[$
3. La fonction f définie par $f(x)=\ln\left(x^2+5x+\dfrac{25}{4}\right)$ est définie sur :	☐ $\mathbb{R}$
	☐ $\mathbb{R}^+$
	■ $\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{5}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$
	☐ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
	☐ $]5\,;\,+\infty[$
4. Le signe de l'expression $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$ est	☐ toujours positif
	■ toujours négatif
	☐ dépend du signe de x
	☐ dépend du signe de $x+1$
5. La fonction g définie par $g(x)=\ln\left(\dfrac{3-2x}{3+2x}\right)$ est :	☐ paire
	■ impaire
	☐ ni l'un ni l'autre
6. La suite définie par récurrence par $u_{n+1}=f(u_n)$ $(n\geqslant 0)$ et $u_0>0$, avec $f(x)=x^2$, est :	☐ toujours croissante quelle que soit la valeur strictement positive de u_0
	☐ toujours décroissante quelle que soit la valeur strictement positive de u_0
	■ croissante si et seulement si $u_0>1$
	☐ décroissante si et seulement si $u_0>1$

Explications :

1. $e^{x^2-\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\Leftrightarrow e^{x^2-\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x^2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$
2. On considère l'inéquation $\ln(x)-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)<0$; l'ensemble de définition est $]0\,;\,+\infty[$ car on doit avoir $x>0$ et $\dfrac{1}{x}>0$
   Pour $x>0$, $\ln(x)-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)<0\Leftrightarrow \ln x<\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x-\dfrac{1}{x}<0\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x}<0\Leftrightarrow x^2-1<0\Leftrightarrow x\in]0\,;\,1[$ (car $x>0$)
3. $x^2+5x+\dfrac{25}{4}=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2\geqslant 0$; $\dfrac{5}{2}$ est donc à exclure.
4. $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $0<\dfrac{x^2}{x^2+1}<1$ (car $x^2<x^2+1$), donc $\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)<0$.
5. $\forall x\in\mathscr{D}_g$, $g(-x)=\ln\left(\dfrac{3+2x}{3-2x}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{\frac{2+2x}{3-2x}}\right)=-\ln\left(\dfrac{3-2x}{3+2x}\right)=-g(x)$.
6. Par récurrence : si $u_0>1$, $u_1=u_0^2>u_0$ car $u_0^2-u_0=u_0(u_0-1)>0$ (initialisation) et $u_n<u_{n+1}\Rightarrow f(u_n)<f(u_{n+1})$ donc $u_{n+1}<u_{n+2}$ car $x\mapsto x^2$ est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

Exercice pour les spécialistes

1. (a) $3\times(-2)+7\times 1=1$ donc le couple $(u\,;\,v)=(-2\,;\,1)$ est une solution particulière de l'équation $3x+7y=1$.
   $3u+7v=1\Rightarrow 3\times\left(u\times 10^{2n}\right)+7\times\left(v\times 10^{2n}\right)=1\times 10^{2n}$ donc le couple $\boxed{(x_0\,;\,y_0)=\left(10^{2n}u\,;\,10^{2n}v\right)}$ est une solution particulière de (E).

   (b) $(E)\Leftrightarrow 3x+7y=1\Leftrightarrow 3x+7y=3x-0+7y_0\Leftrightarrow 3(x-x_0)=7(y_0-y)$.
   3 divise $3(x-x_0)$, donc 3 divise $7(y_0-y)$ donc $y_0-y=3k$, $k\in\mathbb{Z}$, d'où $y=y_0-3k$.
   En remplaçant, on trouve $3(x-x_0)=7\times 3k$ d'où $x-x_0=7k$ donc $x=x_0+7k$.
   L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{(x_0+7k\,;\,y_0-3k),\,k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

2. (a) $100=7\times 14+2 \iff 100\equiv 2 \mod 7$.
   $(x\,;\,y)$ solution de (G) signifie $3x^2+7y^2=10^{2n}\iff 3x^2+7y^2=\left(10^2\right)^n\iff 3x^2+7y^2=100^n$.
   Or $100\equiv 2\mod 7\Rightarrow 100^n\equiv 2^n\mod 7$.
   Donc $3x^2+7y^2\equiv 2^n\mod 7$.
   Mais $7y^2\equiv 0\mod 7$, donc finalement $\boxed{3x^2\equiv 2^n\mod 7}$.

   (b)

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.	0	3	5	6	6	5	3

   (c) En calculant les premières puissances de 2 modulo 7, on observe un cycle d'ordre 3.
   De trois choses l'une :
   - $n=3p, p\in N$; alors $2^{3p}=\left(2^3\right)^p=8^p$. Or $8\equiv 1\mod 7\Rightarrow 8^p\equiv 1\mod 7$;
   - $n=3p+1$; alors $2^{3p+1}=2^{3p}\times 2=8^p\times 2$. Or $8\equiv 1\mod 7\Rightarrow 8^p\equiv 1\mod 7\Rightarrow 2^{3p}\times 2\equiv 2\mod 7$;
   - $n=3p+2$; alors $2^{3p+2}=2^{3p}\times 2^2=4\times 2^{3p}=4\times 8^p$. Comme $8^p\equiv 1\mod 7, 4\times 8^p\equiv 4\mod 7$.

   Conclusion : 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
   On vient de voir que les restes dans la division par 7 de 2^n ne sont pas les mêmes que ceux de la division de $3x^2$ par 7.
   Donc $3x^2$ et 2^n ne peuvent être congrus modulo 7. D'après le 2. a. il n'y a donc $\boxed{\text{pas de solution pour l'équation } (G)}$.