Correction du bac blanc

Exercice 1

Partie A

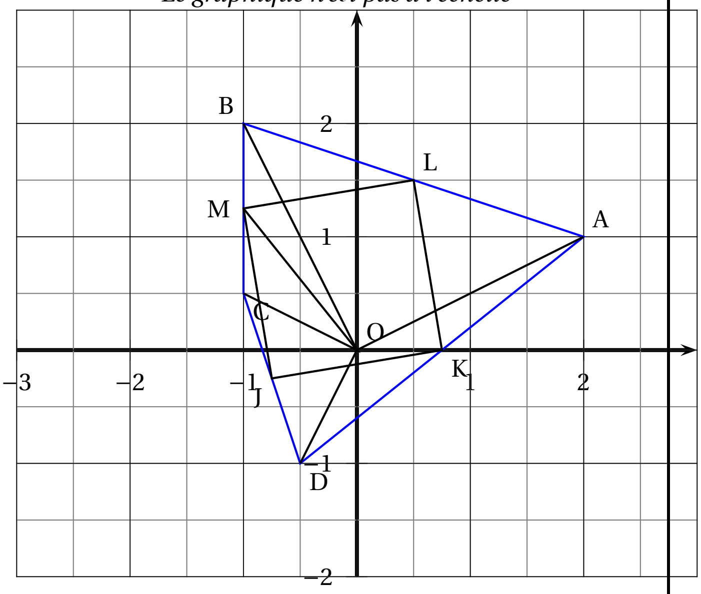
1. α est tel que $\left\{\begin{array}{lcl}\alpha(1+\mathrm{i}) & = & 1+3\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\alpha^2 & = & -4+3\mathrm{i}\end{array}\right.$
   La première égalité donne $\alpha = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = 2+\mathrm{i}$.
   On a bien $\mathrm{i}(2+\mathrm{i})^2 = \mathrm{i}(4-1+4\mathrm{i}) = -4+3\mathrm{i}$.
2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2 - (1+3\mathrm{i})z + (-4+3\mathrm{i})$.
   Développons $(z-\alpha)(z-\mathrm{i}\alpha) = z^2 - \mathrm{i}\alpha z - \alpha z + \mathrm{i}\alpha^2 = z^2 - \alpha z(1+\mathrm{i}) + \mathrm{i}\alpha^2 =$
   $z^2 - (1+3\mathrm{i})z - 4 + 3\mathrm{i}$.
   Les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sont donc $\alpha = 2+\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\alpha = -1+2\mathrm{i}$.

Partie B

1. $b = -1+2\mathrm{i} = \mathrm{i}^2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}(\mathrm{i}+2) = \mathrm{i}a$. a est l'affixe de A et b celle de B. L'égalité $b = \mathrm{i}a$ donne en module OA = OB et en argument $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$: le triangle OAB est donc rectangle isocèle en O.

2. Le point D est l'image de C dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On a donc $d = \mathrm{i}c = \mathrm{i}\left(-1+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}$.

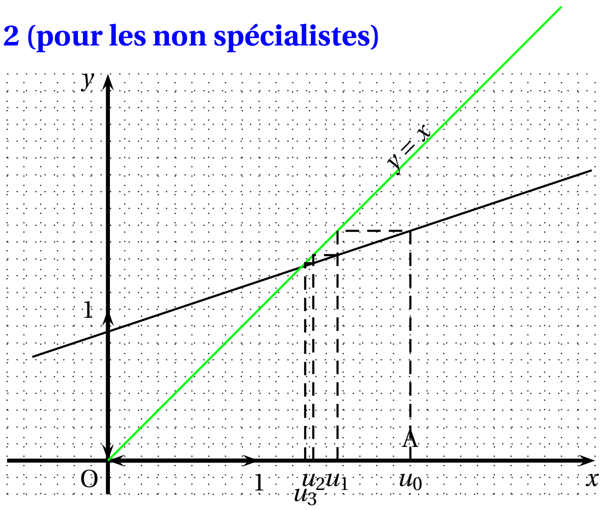
Le graphique n'est pas à l'échelle



3. L'affixe de M est $-1+\dfrac{5}{4}\mathrm{i}$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ est $\dfrac{5}{2}+2\mathrm{i}$.
   On a donc $\dfrac{z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}} = \dfrac{-1+\dfrac{5}{4}\mathrm{i}}{\dfrac{5}{2}+2\mathrm{i}} = \dfrac{-4+5\mathrm{i}}{10+8\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(4\mathrm{i}+5)}{2(4\mathrm{i}+5)} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
4. L'égalité précedente entraîne que $\left(\overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
5. En prenant les modules des membres de l'égalité trouvée au 3. on obtient
   $\dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{DA}} = \dfrac{1}{2} \iff \mathrm{OM} = \dfrac{1}{2}\mathrm{DA}$.
6. On admet que le quadrilatère JKLM est un parallélogramme. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont $\left(-3\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$, celles du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-3\right)$. On a $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0$.
   Or dans (ABC), (LM) est parallèle à (AC) (droite des milieux) et dans (ABD) (LK) est parallèle à (BD).
   Conclusion : (LM) est perpendiculaire à (LK). Le parallélogramme (JKLM) ayant un angle droit est un rectangle.
   D'autre part $\mathrm{AC} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+9} = \dfrac{\sqrt{37}}{4}$ et $\mathrm{BD} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+9} = \dfrac{\sqrt{37}}{4}$.
   Donc $\mathrm{LM} = \dfrac{\mathrm{AC}}{2} = \dfrac{\sqrt{37}}{4}$ et $\mathrm{LK} = \dfrac{\sqrt{37}}{4}$.
   (JKLM) est un rectangle dont deux côtés consécutifs ont la même longueur : c'est un carré.

Exercice 2 (pour les non spécialistes)

1. (a)



   (b) Par récurrence :
   - **Initialisation** : $u_0 = 2 = \dfrac{36}{18} \geqslant \dfrac{23}{18}$.
   - **Hérédité** : supposons que $u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$;
     alors $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant \dfrac{1}{3} \times \dfrac{23}{18}$ soit $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant \dfrac{23}{54}$.
     Puis $\dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27} \geqslant \dfrac{23}{54} + \dfrac{23}{27} \iff u_{n+1} \geqslant \dfrac{3\times 23}{3\times 18} \iff u_{n+1} \geqslant \dfrac{23}{18}$.
     On a donc bien démontré que pour tout naturel n, $u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$.

   (c) Monotonie :
   On la démontre par récurrence :
   - **Initialisation** : $u_0 = 2$ et $u_1 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{23}{27} = \dfrac{41}{27} < \dfrac{54}{27} = u_0$. Donc $u_0 > u_1$.
   - **Hérédité** :
     Supposons qu'il existe un naturel p tel que $u_{p-1} > u_p$. Par croissance de la fonction f sur $\mathbb{R}$, on a $f\left(u_{p-1}\right) > f\left(u_p\right) \iff u_p > u_{p+1}$.

   Conclusion :
   on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$.

   (d) La suite (u_n) est donc minorée et décroissante : elle est donc convergente vers un réel ℓ ;

f est continue donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{23}{27} = x \Leftrightarrow \frac{23}{27} = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow x = \frac{23}{27} \times \frac{3}{2} = \frac{23}{18}$.

$\boxed{\text{La limite de la suite est } \frac{23}{18}}$.

2. (a) Soit $S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k}$.

$S_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}}$

S_n est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, de raison $q = \frac{1}{10}$.

$S_n = \frac{1}{10^2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{90}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$

$= \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

(car la somme contient n termes).

(b) On a :

$v_1 = 1,2 + 7 \times \frac{1}{10^2}$

$v_2 = 1,2 + 7\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = 1,2 + 7\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{2n+1}}\right)$

$= 1,2 + 7 \times \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1,2 + \frac{7}{90}$

$= \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$. Cette limite est bien rationnelle.

3. - On a vu que la suite (u_n) est décroissante.
   - De plus $v_{n+1} - v_n = \frac{7}{10^{n+2}} > 0$: la suite (v_n) est donc croissante.
   - Enfin ces deux suites ont la même limite $\frac{23}{18}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Conclusion : ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 2 (pour les spécialistes)

1. (a)

a	1	2	3	4	5	6
y	1	4	5	2	3	6

(b) On vient de voir que $5 \times 3 \equiv 1 \pmod 7$ donc $3x \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow 5 \times 3x \equiv 5 \times 5 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 25 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7$ donc $3x \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 4 \pmod 7$.

Réciproquement : $x \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow 3x \equiv 12 \pmod 7 \equiv 5 \pmod 7$.

Par conséquent : $3x \equiv 5 \pmod 7 \iff x \equiv 4 \pmod 7$.

(c) L'équation $ax \equiv 0 \pmod 7$ équivaut à $7 \mid ax$ mais, comme 7 est premier avec a puisque $1 \leqslant a \leqslant 6$, d'après le théorème de Gauss, on a : $7 \mid x$.

2. (a) Comme $a \times a^{p-2} = a^{p-1}$ et que a n'est pas divisible par p, d'après le petit théorème de Fermat on a $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, donc a^{p-2} est solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod p$.

(b) On a $r \equiv a^{p-2} \pmod p$ donc r est bien solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod p$.

Maintenant montrons l'unicité par l'absurde.

On suppose que deux entiers r_1 et r_2 de A_p sont solutions de l'équation.

On a $ar_1 \equiv ar_2 \pmod p \Rightarrow a^{p-2} \times ar_1 \equiv a^{p-2} \times ar_2 \pmod p \Rightarrow r_1 \equiv r_2 \pmod p$.

Ainsi $r_1 - r_2$ est un multiple de p.

Or : $0 \leqslant r_1 < p$ et $0 \leqslant r_2 < p$ d'om $-p < -r_2 \leqslant 0$. Par somme : $-p < r_1 - r_2 < p$ donc $r_1 - r_2$ est dans l'ensemble $\{-(p-1)\ ;\ -(p-2)\ ;\ \ldots\ ;\ p-1\}$, et le seul multiple de p dans cet ensemble est 0 donc $r_1 = r_2$, ce qui montre l'unicité.

(c) On suppose que $xy \equiv 0 \pmod p$ donc soit $p \mid x$ soit p et x sont premiers entre eux et d'après le théorème de Gauss on a : $p \mid y$.

Réciproquement, si p divise x ou y, p divise xy donc $xy \equiv 0 \pmod p$.

L'équivalence est donc démontrée.

(d) On sait que le reste de la division de 2^{31-2} par 31 est l'unique solution de l'équation $2x \equiv 1 \pmod{31}$, or $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ donc $2^{25} \equiv 1 \pmod{31}$ ainsi $2^{29} \equiv 2^4 \pmod{31}$, $2^4 = 16$ est l'unique solution de de l'équation $2x \equiv 1 \pmod{31}$ dans A_{31}.

On sait que le reste de la division de 3^{31-2} par 31 est l'unique solution de l'équation $3x \equiv 1 \pmod{31}$ donc il faut calculer le reste de $3^{29} \pmod 31$.

On a :

$3^2 \equiv 9 \pmod 31$.

$3^3 \equiv 27 \pmod 31$.

$3^4 = \left(3^2\right)^2 \pmod 31 \equiv 81 \pmod 31 \equiv 19 \pmod 31$.

$3^5 = 3^4 \times 3 \equiv 19 \times 3 \pmod 31 \equiv 57 \pmod 31 \equiv 26 \pmod 31 \equiv -5 \pmod 31$

$3^{10} = \left(3^5\right)^2 \equiv (-5)^2 \pmod 31 \equiv 25 \pmod 31 \equiv -6 \pmod 31$.

$3^{29} = 3^{20+5+4} \equiv \left(3^{10}\right)^2 \times 3^5 \times 3^4 \pmod 31 \equiv (-6)^2 \times (-5) \times 19 - 5 \equiv 36 \times (-5) \times 19 \pmod 31 \equiv 5 \times (-5) \times 19 \pmod 31 \equiv -25 \times 19 \pmod 31 \equiv 6 \times 19 \pmod 31 \equiv 144 \pmod 31 \equiv 21 \pmod 31$.

La solution est donc 21.

Pour la dernière équation, on factorise :

$6x^2 - 5x + 1 = (2x-1)(3x-1)$ ainsi

$$6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31} \iff (2x-1)(3x-1) \equiv 0 \quad (\text{mod}$$

$$\iff (2x-1) \equiv 0 \pmod{31} \text{ ou } (3x-1) \equiv 0 \quad (\text{mod}$$

On sait donc que les solutions de ces deux dernières équations sont dans $\mathbb{Z}$: $16 + 31k$ et $21 + 31k$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'après les deux équations précédentes.

Exercice 3

1. (E_0) : $y' + y = 1 \iff y' = -y + 1 \iff y = Ce^{-x} + 1$ où C est une constante réelle.

2. f solution de (E) $\iff f' + (1 + \tan x) f = \cos x$

Or $f(x) = g(x)\cos x$. f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ en tant que produit de fonctions dérivables

et $f'(x) = g'(x)\cos x - g(x)\sin x$

Ainsi f solution de E

$\Longleftrightarrow g'\cos x - g\sin x + (1+\tan x)g\cos x = \cos x$

$\Longleftrightarrow g'\cos x - g\sin x + \left(1+\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)g\cos x = \cos x$

$\Longleftrightarrow g'\cos x - g\sin x + g\cos x + g\sin x = \cos x$

$\Longleftrightarrow (g'+g)\cos x = \cos x$

$\Longleftrightarrow g'+g = 1$ car $\cos x \neq 0$ pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$

$\Longleftrightarrow g$ est solution de (E_0).

3. f est solution de (E) donc g est solution de (E_0). Or les solutions de (E_0) sont les fonctions du type $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x}+1$ et ainsi, puisque $f = g\cos x$, $f = \left(C\mathrm{e}^{-x}+1\right)\cos x$.
De plus, $f(0) = 0 \Longrightarrow \left(C\mathrm{e}^{0}+1\right)\cos 0 = 0 \Longrightarrow C = -1$
f est donc la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par

$$f(x) = \left(-\mathrm{e}^{-x}+1\right)\cos x$$

Exercice 4

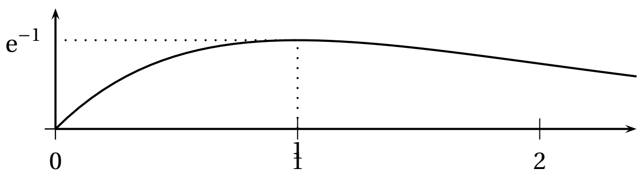
Partie A

1. (a) Pour tout x, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}} = 0$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(b) La fonction f produit de deux fonctions dérivables est dérivable.
Pour tout x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
Comme pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$. Soit sur $[0\,,\,+\infty[$: $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,,\,1]$; $f'(x) \leqslant 0$ sur $[1\,,\,+\infty]$.
Donc f est croissante sur l'intervalle $[0\,,\,1]$, décroissante sur l'intervalle $[1\,,\,+\infty[$.
D'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

(c) Représentation graphique de f (échelle non respectée) :



2. (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,,\,1]$; $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$; donc pour $m \in \left]0\,,\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$ l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0\,,\,1[$.
La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,,\,+\infty[$; $f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f = 0$; donc pour $m \in \left]0\,,\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$ l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution sur $]1\,,\,+\infty[$ (théorème des valeurs intermédiaires).
En résumé, pour tout m de $\left]0\,,\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
Résultat attendu graphiquement : les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de la courbe Γ et de la droite d'équation $y = m$. Or si $m \in \left]0\,,\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$, cette droite coupe bien la courbe en deux points distincts.

(b) Pour $m = \dfrac{1}{4}$, la solution α est celle qui appartient à l'intervalle $]0\,,\,1[$. On trouve facilement que $\alpha \approx 0{,}357$ soit $\alpha \in]0{,}35\,,\,0{,}36[$.

c. De façon immédiate, pour $m = 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solution $x = 0$, et pour $m = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ cette équation admet pour unique solution $x = 1$.

Partie B

1. (a) Par hypothèse $u_0 > 0$.
p étant un entier naturel quelconque, si $u_p > 0$ alors u_{p+1}, produit de u_p par le réel strictement positif e^{-p}, est strictement positif.
En conclusion pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

b. Comme pour tout entier n, $u_n > 0$, comparons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-u_n}$, $-u_n < 0$ donc $\mathrm{e}^{-u_n} < 1$, soit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$: la suite (u_n) est donc décroissante.

c. Il résulte des questions précédentes que la suite (u_n), décroissante et minorée (par 0), est convergente. Soit ℓ sa limite.
$u_{n+1} = f(u_n)$ avec f fonction continue.
ℓ est donc solution de l'équation $\ell = \ell\mathrm{e}^{-\ell}$, soit $\ell\left(1-\mathrm{e}^{-\ell}\right) = 0$. Les deux facteurs s'annulant pour la seule valeur 0, on en déduit que $\ell = 0$.
En résumé $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. (a) $w_n - w_{n+1} = \ln u_n - \ln u_{n+1} = \ln \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = -\ln \mathrm{e}^{-u_n} = \ln \mathrm{e}^{u_n} = u_n$.

(b) Il résulte de **a.** que :
$S_n = w_0 - w_1 + w_1 - w_2 + \cdots + w_{n-1} - w_n + w_n - w_{n+1}$.
Soit après simplification de proche en proche :
$S_n = w_0 - w_{n+1}$.

c. Sachant, d'après **B.1.c.**, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, et par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

3. Par définition $u_1 = u_0\mathrm{e}^{-u_0}$ donc $u_1 \in \left]0\,,\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$.
Or d'après **A. 2. a.**, on sait qu'il existe une deuxième valeur, β, telle que $\beta\mathrm{e}^{-\beta} = u_1$. On a donc $v_0 = \beta$ puis $v_1 = u_1$ et, plus généralement, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = v_n$.