Correction de la feuille de révision

I Pondichéry avril 2016

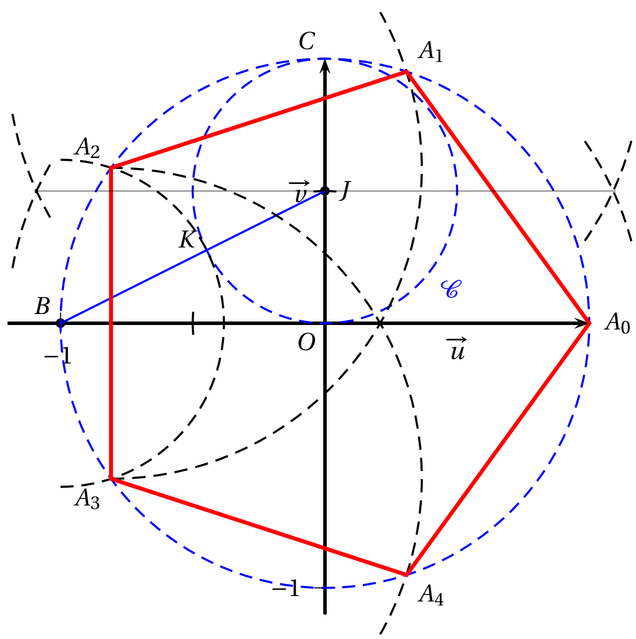
1. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OBJ rectangle en O donne :
$BJ^2 = BO^2 + OJ^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow BJ = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
$BK = BJ - KI = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

2. (a) L'affixe de A_2 a pour module 1 et pour argument $\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$. Donc $z_{A_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}$

   (b) $$BA_2{}^2 = \left|z_{A_2} - z_B\right|^2 = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}} - (-1)\right|^2 = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}} + 1\right|^2 = \left|\cos\frac{4\pi}{5} + 1 + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{5}\right|^2$$
   $$= \left(\cos\frac{4\pi}{5} + 1\right)^2 + \sin^2\frac{4\pi}{5} = \cos^2\frac{4\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} + 1 + \sin^2\frac{4\pi}{5} = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

   (c) D'après le logiciel de calcul formel, $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$ donc :
   $BA_2^2 = 2 + 2\times\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
   Donc $BA_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ d'après le logiciel de calcul formel.
   On en déduit que $BA_2 = BK$.

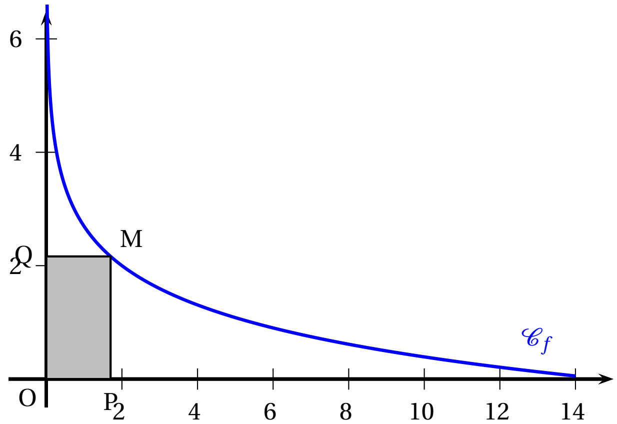
3. Procédé de construction (voir figure ci-dessous) :
   - Soit C le point de coordonnées $(0;\ 1)$. La médiatrice de $[OC]$ coupe l'axe des ordonnées au point J de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
     On place le point B sur l'axe des abscisses, d'abscisse négative tel que OB = 2OJ, on construit $[BJ]$ et le cercle $\mathscr{C}$ centré en J passant par O donc de rayon $\frac{1}{2}$;
   - on obtient le point K à l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et du segment $[BJ]$;
   - le cercle de centre B de rayon BK coupe le cercle unitaire aux points A_2 et A_3 ;
   - le cercle de centre A_2 passant par A_3 recoupe le cercle unitaire en A_1 ;
   - le cercle de centre A_3 passant par A_2 recoupe le cercle unitaire en A_4 ;
   - le point A_0 est le point d'affixe 1.



II Pondichéry avril 2016

Soit f la fonction définie sur $[0~;~14[$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- On prend deux positions du point M et on compare les aires des rectangles obtenus.
  - Si M est d'abscisse 2, son ordonnée est $f(2) = 2 - \ln(1) = 2$ donc l'aire du rectangle OPMQ vaut 4 unités d'aire.
  - Si M est d'abscisse 4, son ordonnée est $f(4) = 2 - \ln(2)$ donc l'aire du rectangle OPMQ vaut $4 - 2\ln(2)$ qui est différente de 4.

  Donc l'aire du rectangle OPMQ n'est pas constante.
- Le point M a pour abscisse x et pour ordonnée $f(x)$ donc l'aire du rectangle OPMQ est $\mathscr{A}(x) = x \times f(x) = 2x - x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

  Étudions les variations de la fonction $\mathscr{A}$; on remarque que $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2$ donc $\left(\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)' = \dfrac{1}{x}$

  $\mathscr{A}'(x) = 2 - \left(\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + x\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

  $1 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) > 0 \iff 1 > \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \iff \mathrm{e} > \dfrac{x}{2} \iff x < 2\mathrm{e}$

  $\mathscr{A}(2\mathrm{e}) = 2 \times 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} \times \ln\dfrac{2\mathrm{e}}{2} = 2\mathrm{e}$ d'où le tableau de variation de la fonction $\mathscr{A}$:

x	0		$2\mathrm{e}$		14
$\mathscr{A}'(x)$	||	+	0	−	
$\mathscr{A}(x)$	||	↗	$2\mathrm{e}$	↘	

  $f(2\mathrm{e}) = 2 - \ln\dfrac{2\mathrm{e}}{2} = 2 - 1 = 1$. donc l'aire du rectangle OPMQ est maximale pour le point M de coordonnées $(2\mathrm{e}\,;\,1)$.

III Pondichéry avril 2016

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

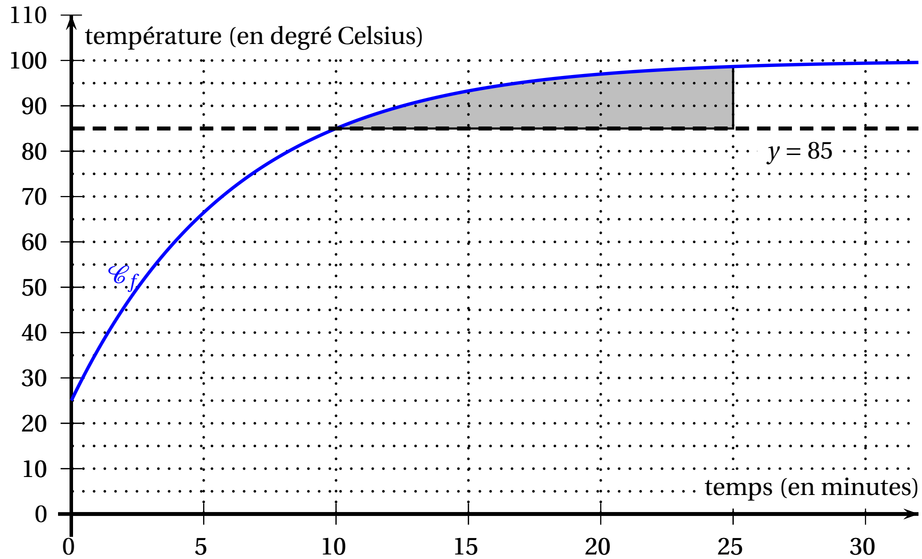
1. On cherche T_3 :
   $T_1 = 0,85 \times T_0 + 15 = 36,25$; $T_2 = 0,85 \times T_1 + 15 = 45,8125$; $T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 = 53,940625$
   La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est approximativement de 54 ° C.
2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
   - Pour $n = 0$: $100 - 75 \times 0,85^0 = 100 - 75 \times 1 = 25 = T_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $T_p = 100 - 75 \times 0,85^p$.
     D'après l'algorithme, on peut dire que, pour tout $n \geqslant 0$, $T_{n+1} = 0,85 \times T_n + 15$.
     Donc $T_{p+1} = 0,85\left(100 - 75 \times 0,85^p\right) + 15 = 85 - 75 \times 0,85^{p+1} + 15 = 100 - 75 \times 0,85^{p+1}$
     La propriété est donc vraie au rang $p + 1$.
   - La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $p \geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   Pour tout entier naturel n, $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. La stérilisation débute dès que la température est supérieure à 85 ° C, donc on cherche n tel que $T_n > 85$:
   $$\begin{array}{rll} T_n > 85 & \iff 100 - 75 \times 0,85^n > 85 & \\ & \iff 15 > 75 \times 0,85^n & \\ & \iff 0,2 > 0,85^n & \\ & \iff \ln 0,2 > \ln\left(0,85^n\right) & \text{croissance de la fonction ln} \\ & \iff \ln 0,2 > n \times \ln 0,85 & \text{propriété de la fonction ln} \\ & \iff \dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,85} < n & \text{car } \ln 0,85 < 0 \end{array}$$
   Or $\dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,85} \approx 9,9$ donc la stérilisation débute au bout de 10 minutes.

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec : $f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}$.

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $f'(t) = -75 \times \left(-\dfrac{\ln 5}{10}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} = 7,5 \times \ln 5\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} > 0$ car $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x.
   Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty]$.
   (b) $f(10) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10} = 100 - 75\mathrm{e}^{-\ln 5} = 100 - \dfrac{75}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = 100 - \dfrac{75}{5} = 85$
   Or la fonction f est strictement croissante donc si $x \geqslant 10$, alors $f(x) \geqslant f(10)$ ce qui veut dire qque $f(x) \geqslant 85$.
2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.
   On note $\mathscr{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$,
   $y = 85$ et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.
   On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathscr{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



(a) $A(25)$ est représentée en gris sur le graphique ci-dessus. Chaque rectangle correspond à 5×5 unités d'aire. En comptant les rectangles inclus dans la partie grisée, on en compte 3 entiers plus un demi, ce qui fait $3,5 \times 25 = 87,5$ unités d'aire. Donc $\mathscr{A}(25) > 80$.

(b) $A(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} \left(f(t) - 85\right) \mathrm{d}t = \int_{10}^{\theta} \left[\left(100 - 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) - 85\right] \mathrm{d}t = \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) \mathrm{d}t$

$= \displaystyle\int_{10}^{\theta} 15 \mathrm{d}t - \int_{10}^{\theta} 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} \mathrm{d}t = 15\left[t\right]_{10}^{\theta} - 75 \int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} \mathrm{d}t = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} \mathrm{d}t$

(c) La stérilisation est finie au bout de 20 minutes si $\mathscr{A}(20) > 80$.

$$\mathscr{A}(20) = 15(20-10) - 75 \int_{10}^{20} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} \mathrm{d}t = 150 - 75\left[-\frac{10}{\ln 5}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right]_{10}^{20} = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\mathrm{e}^{-2\ln 5} - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right]$$

$$= 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\left(\mathrm{e}^{-\ln 5}\right)^2 - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right] = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right] = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\frac{1}{25} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= 150 + \frac{750}{\ln 5} \times \frac{-4}{25} = 150 - \frac{120}{\ln 5} \approx 75,44 < 80$$

Donc la stérilisation n'est pas finie au bout de 20 minutes.

IV Liban mai 2016

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre J. Une représentation en perspective de ce solide est donnée ci-dessous. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\, \overrightarrow{\mathrm{AB}},\, \overrightarrow{\mathrm{AD}},\, \overrightarrow{\mathrm{AK}}\right)$.

1. (a) Montrons que $\mathrm{IE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On sait que les deux pyramides ABCDE et ABCDF sont identiques, et que toutes les arêtes ont la même longueur 1. Ce sont donc des pyramides régulières à base carrée et E comme F ont pour projeté orthogonal sur ABCD le point I, centre du carré ABCD.

I est le centre du carré ABCD de côté 1, c'est donc le milieu de [AC] et on a :

$\mathrm{AC} = \sqrt{2}$ et $\mathrm{AI} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme I est le projeté orthogonal de E sur ABCD, le triangle AEI est rectangle en I et on a :

$\mathrm{IE}^2 = \mathrm{AE}^2 - \mathrm{AI}^2 = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$. Et finalement $\boxed{\mathrm{IE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

I est le milieu de [BD] et $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, d'où : $\boxed{\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)}$.

On a : $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AI}} + \overrightarrow{\mathrm{IE}}$, d'où : $\boxed{\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

Par raison de symétrie par rapport à ABCD : $\boxed{\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

(b) Montrons que le vecteur $\vec{n}\left(0\,;\,-2\,;\,\sqrt{2}\right)$ est normal au plan (ABE).

On a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ ne sont pas colinéaires et on a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{AE}} \cdot \vec{n} = 0$.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan ABE donc $\vec{n}(0\,;\,-2\,;\,\sqrt{2})$ est normal au plan

(ABE).

(c) Déterminons une équation cartésienne du plan (ABE).

(ABE) passe par le point A$(0;0;0)$ et a pour vecteur normal $\vec{n}\,(0\,;\,-2\,;\,\sqrt{2})$.

On en déduit une équation cartésienne de (ABE) : $\boxed{-2y+\sqrt{2}z=0}$.

2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

(a) Démontrons que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

Dans le plan (FDC) considérons les vecteurs $\overrightarrow{\text{DC}}$ et $\overrightarrow{\text{DF}}$ qui ne sont pas colinéaires.

Comme ABCD est un carré on : $\overrightarrow{\text{DC}}=\overrightarrow{\text{AB}}$ et on a : $\overrightarrow{\text{DC}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

D'autre part sachant que D$(0\,;\,1\,;\,0)$, on a : $\overrightarrow{\text{DF}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$. On a : $\overrightarrow{\text{DC}}\cdot\vec{n}=0$ et $\overrightarrow{\text{FD}}\cdot\vec{n}=0$.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FDC) : $\vec{n}\left(0\,;\,-2\,;\,\sqrt{2}\right)$ est normal au plan (FDC)

Les plans (FDC) et (ABE) admettent un même vecteur normal donc ils sont parallèles.

(b) Déterminons l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

Comme M appartient à [EM] et que M est le milieu de [FD], M appartient à l'intersection de (EMN) et (FDC).

Comme (FDC) et (ABE) sont parallèles, le plan (EMN) les coupe suivant deux droites parallèles.

Or l'intersection de (EMN) et (ABE) est la droite (EN).

On en déduit que l'intersection de (EMN) avec (FDC) est la droite parallèle à (EN) passant par M.

(c) Construisons (voir annexe) la section du solide ADECBF par le plan (EMN).

Soit G l'intersection de la parallèle à (EN) passant par M avec le plan (BCF) : c'est l'intersection de (EM) avec (CD).

Le segment [GM] est la section de la face FCD par le plan (EMN).

Par raison de symétrie, les plan (CDE) et (ABF) sont parallèles.

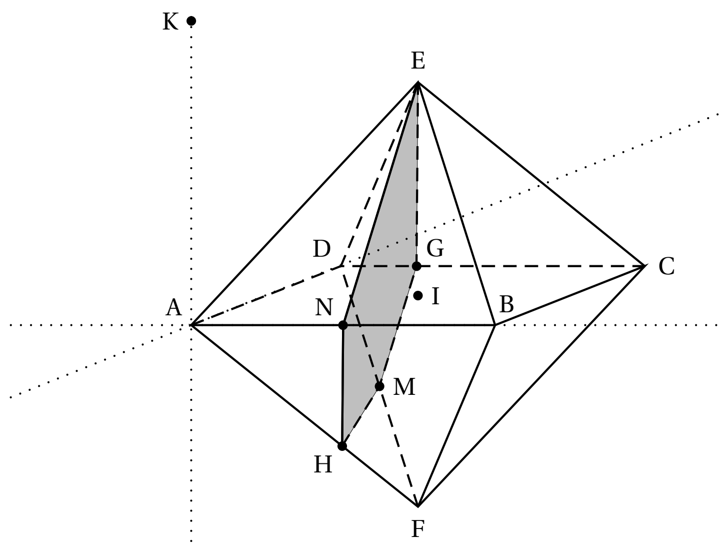
En tenant le même raisonnement que précédemment, on montre que le plan (EMN) les coupe suivant deux droites parallèles.

Or l'intersection de (EMN) avec le plan (CDE) est la droite (EG). Alors le plan(EMN) coupe le plan(ABF) suivant la parallèle à (ERG) passant par N.

Cette droite coupe (AF) en H.

Le segment [NH] est la section de la face ABF par le plan (EMN).

On en déduit que le polygone ENHMG est la section du solide par le plan (EMN).



V Liban mai 2016

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+\text{e}^{1-x}}$.

Partie A

1. Étudions le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.

f est dérivable sur $[0\,;\,1]$ avec pour tout $x\in[0\,;\,1]$: $f'(x)=\dfrac{-(-1)\text{e}^{1-x}}{(1+\text{e}^{1-x})^2}=\dfrac{\text{e}^{1-x}}{(1+\text{e}^{1-x})^2}$.

Pour tout $x\in[0\,;\,1]$, $\text{e}^{1-x}>0$ et $(1+\text{e}^{1-x})^2>0$.

On en déduit que pour tout $x\in[0\,;\,1]$, $f'(x)>0$ et donc que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

2. En remarquant que $\text{e}=\text{e}^1$, et que pour tout réel x, $\text{e}^{-x}\times\text{e}^{x}=1$, on peut écrire :

$f(x)=\dfrac{1}{1+\text{e}\times\text{e}^{-x}}=\dfrac{\text{e}^x}{(1+\text{e}\times\text{e}^{-x})e^x}=\dfrac{\text{e}^x}{\text{e}^x+\text{e}}$.

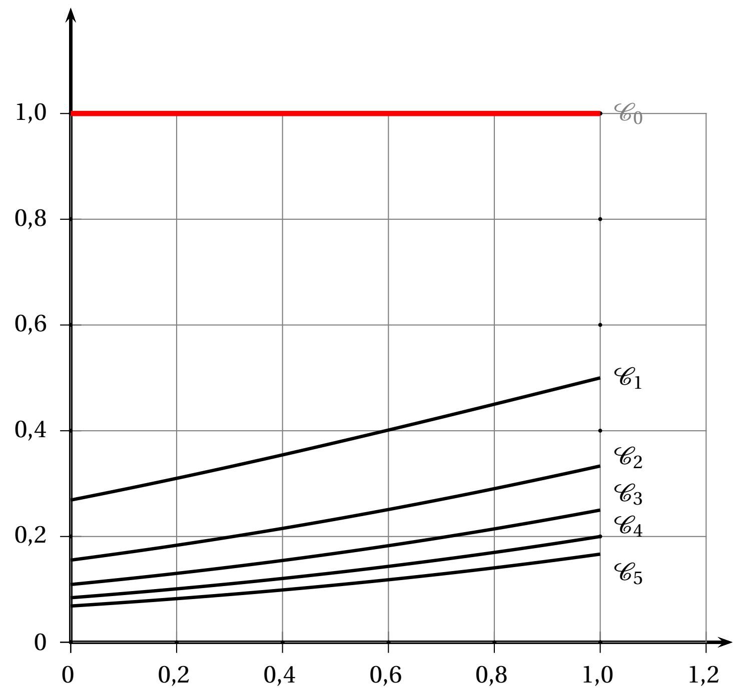
3. f est dérivable sur $[0\,;\,1]$ donc continue et est de la forme $\dfrac{u'}{u}$; elle admet donc comme primitive pour tout $x\in[0\,;\,1]$ la fonction F définie par : $F(x)=\ln(\text{e}^x+\text{e})$.

On en déduit que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x=\Big[\ln(e^x+e)\Big]_0^1=\ln(2\text{e})-\ln(1+\text{e})=\ln(2)+\ln(\text{e})-\ln(1+\text{e})=\ln(2)+1-\ln(1+\text{e})$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0\,;\,1]$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. à 5.
   Pour tout $x \in [0;1]$, on a : $f_0(x) = \dfrac{1}{1+0\times \mathrm{e}^{1-x}} = 1$.
   La courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0 est le segment d'équation $y = 1$ avec $x \in [0;1]$.
   Voici le graphique complété :



2. Soit n un entier naturel.
   Pour tout $x \in [0;1]$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}} > 0$. On en déduit que u_n représente l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_n$ délimitée par l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   On a en particulier $u_0 = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1$
3. Il semble que la suite (u_n) soit décroissante car les aires sont de plus en plus petites. Démontrons-le.
   Soit n un entier naturel.
   Pour tout réel $x \in [0;1]$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{1}{1+(n+1)\mathrm{e}^{1-x}} - \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}} = \dfrac{-e^{1-x}}{(1+n\mathrm{e}^{1-x})(1+(n+1)\mathrm{e}^{1-x})} < 0$.
   On en déduit que pour tout réel $x \in [0;1]$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ et comme par intégration sur un intervalle, l'ordre est conservé, on a pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x < \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $u_{n+1} < u_n$.
   Ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement décroissante.
4. Soit n un entier naturel.
   Pour tout réel $x \in [0;1]$, on a :$f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}} > 0$ et donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x > 0$
   Ce qui prouve que la suite (u_n) est minorée par 0.
   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge et par conséquent elle admet une limite finie.

VI Amérique du Nord juin 2016

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4i et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+\mathrm{i})^n$.

1. $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ donc $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

2. $|z_n| = \left|(1+\mathrm{i})^n\right| = |1+\mathrm{i}|^n = \boxed{(\sqrt{2})^n}$.
   $OM_n = |z_n| = (\sqrt{2})^n$.
   Comme $\sqrt{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n + +\infty$.
   On considère le cercle circonscrit au carré ABCD ; ce cercle a pour rayon 4. Puisque OM_n tend vers $+\infty$, il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $OM_n > 4$, donc M_n est extérieur au cercle de centre O et de rayon 4, donc extérieur au carré ABCD.

VII Polynésie juin 2016

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

   Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

   - en C2 on entre « =B2+2*A2×A2+3*A2+5 » et
   - en B3 on entre « =2*B2+2*A2×A2-A2 »

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.
   Il semblerait que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = 7 \times 2^n$
   on aurait alors $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$ car $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$

   Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$

   Initialisation : pour $n = 0\,,\ u_0 = 2$ et $7 \times 2^0 - 2 \times 0^2 - 3 \times 0 - 5 = 7 - 5 = 2$
   donc la propriété est vérifiée au rang $n = 0$

   Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = 7 \times 2^k - 2k^2 - 3k - 5$
   alors $u_{k+1} = 2\left(7 \times 2^k - 2k^2 - 3k - 5\right) + 2k^2 - k = 7 \times 2^{k+1} - 2k^2 - 7k - 10$
   or $7 \times 2^{k+1} - 2(k+1)^2 - 3(k+1) - 5 = 7 \times 2^{k+1} - 2k^2 - 4k - 2 - 3k - 3 - 5 = 7 \times 2^{k+1} - 2k^2 - 7k - 10$
   donc si $u_k = 7 \times 2^k - 2k^2 - 3k - 5$, cela entraîne que $u_{k+1} = 7 \times 2^{k+1} - 2(k+1)^2 - 3(k+1) - 5$

   La propriété est donc héréditaire à partir du rang 0 or elle est vérifiée au rang 0

   Finalement $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5 = 7 \times 2^n$.

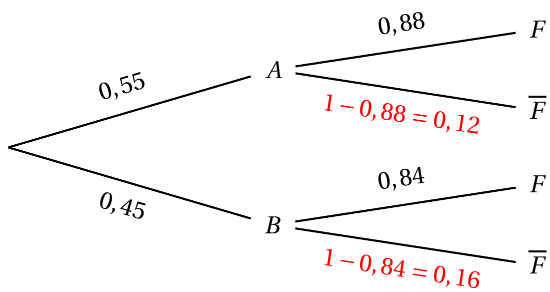
VIII Asie uin 2016

Partie A : production de fraises

On appelle :

- A l'évènement « la fleur de fraisier vient de la serre A » ;
- B l'évènement « la fleur de fraisier vient de la serre B » ;
- F l'évènement « la fleur de fraisier donne une fraise » ;
- $\overline{F}$ l'évènement contraire de F.

On résume les données du texte dans un arbre pondéré :



Proposition 1 :
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

D'après les notations, on cherche la probabilité de l'évènement F ; d'après la formule des probabilités totales :
$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) = P(A) \times P_A(F) + P(B) \times P_B(F) = 0,55 \times 0,88 + 0,45 \times 0,84 = 0,862$
La proposition 1 est vraie.

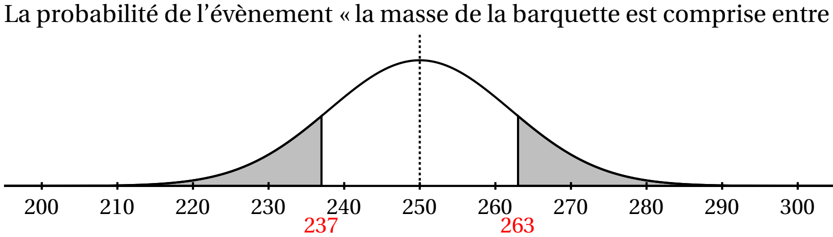
Proposition 2 :
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne une fleur.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

On cherche la probabilité que la fleur provienne de la serre A sachant qu'elle a donné une fraise :
$P_F(A) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,55 \times 0,88}{0,862} \approx 0,561 \neq 0,439$
La proposition 2 est fausse.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.

1. On donne $P(X \leqslant 237) = 0,14$.
   On complète le graphique donné dans l'énoncé.
   On constate que $237 = 250 - 13 = \mu - 13$ et $263 = 250 + 13 = \mu + 13$.
   Pour des raisons de symétrie de la fonction de densité autour de la droite d'équation $x = \mu$, on a :
   $P(X \leqslant 237) = P(X \geqslant 263)$ (parties grisées sur la figure).
   $P(237 < X < 263) = 1 - (P(X \leqslant 237) + P(X \geqslant 263)) = 1 - 2 \times P(X \leqslant 237) = 1 - 2 \times 0,14 = 0,72$.
   La probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes » est 0,72.



2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.
   (a) D'après le cours, la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1 (la loi normale centrée réduite).
   (b) On sait que σ est un nombre strictement positif; donc :
   $X \leqslant 237 \iff X - 250 \leqslant 237 - 250 \iff \dfrac{X - 250}{\sigma} \leqslant -\dfrac{13}{\sigma} \iff Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}$
   Comme $P(X \leqslant 237) = 0,14$, on en déduit que $P\left(Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.

(c) Pour Y suivant la loi normale centrée réduite, on cherche β tel que $P(Y \leqslant \beta) = 0,14$; la calculatrice donne pour résultat environ $-1,08$. On a donc : $-1,08 = -\dfrac{13}{\sigma}$ et donc : $\sigma \approx 12$.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.

(a) Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250 - n\,;\, 250 + n]$.
D'après le cours, pour toute loi normale, $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$; donc
$P(250 - 2 \times 12 \leqslant X \leqslant 250 + 2 \times 12) \approx 0,95$ ou encore $P(250 - 24 \leqslant X \leqslant 250 + 24) \approx 0,95$.
Si $n' > n$, alors $[250 - n\,;\, 250 + n] \subset [250 - n'\,;\, 250 + n']$ et donc
$P(X \in [250 - n\,;\, 250 + n]) < P(X \in [250 - n'\,;\, 250 + n'])$.
Donc $n = 24$ est le plus petit entier tel que $P(250 - n \leqslant X \leqslant 250 + n)$.

(b) On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme,se trouve dans l'intervalle $[230\,;\, m]$.
Cherchons m pour que $P(230 \leqslant X \leqslant m)$ soit égal à $0,95$.
D'après le cours, on sait que $P(230 \leqslant X \leqslant m) = P(X \leqslant m) - P(X < 230)$.
En utilisant la calculatrice, on trouve que $P(X < 230) \approx 0,0478$.
$P(230 \leqslant X \leqslant m) = 0,95 \iff P(X \leqslant m) - P(X < 230) = 0,95 \iff P(X \leqslant m) = P(X < 230) + 0,95 \iff P(X \leqslant m) \approx 0,0478 + 0,95 \iff P(X \leqslant m) \approx 0,9978$
À la calculatrice, si X suit la loi normale d'espérance 250 et d'écart-type 12, le nombre m tel que $P(X \leqslant m) \approx 0,9978$ vaut environ 284,2.
Donc la plus petite valeur de m pour laquelle la probabilité que la masse de la barquette se trouve dans l'intervalle $[230\ ;\ m]$ soit supérieure ou égale à 0,95 est $m = 285$.