TS : devoir sur feuille n° 3

I Nouvelle Calédonie septembre 2013

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

PARTIE A

Variables :	N est un entier
	U, V, W sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter $K+1$ à K
	Affecter U à W
	Affecter $\frac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\frac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

État des variables :

K	W	U	V
0	—	2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

PARTIE B

1. (a) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3}$$
$$= \frac{3(u_n + 3v_n)}{12} - \frac{4(2u_n + v_n)}{12} = \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12}$$
$$= \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \boxed{\frac{5}{12}(v_n - u_n)}.$$

(b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

D'après la question précédente, on peut dire que la suite (w_n) est **géométrique** de raison $q = \frac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

On a alors : pour tout entier naturel n, $w_n = v_0 q^n = \boxed{8\left(\frac{5}{12}\right)^n}$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{3u_n}{3}$

$$= \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \boxed{\frac{w_n}{3}}$$

On a vu que, pour tout n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$; on peut en déduire que pour tout n, $w_n > 0$ et donc que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est **croissante**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{4v_n}{4}$

$$= \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = \boxed{\frac{-w_n}{4}}$$

Et comme $w_n > 0$, on peut dire que $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout n.

Donc la suite (v_n) est **décroissante**.

(b) On a vu que, pour tout n, $w_n > 0$; donc, pour tout n, $v_n - u_n > 0$ c'est-à -dire $v_n > u_n$.

La suite (v_n) est décroissante donc, pour tout n, $v_n \leqslant v_0 \iff v_n \leqslant 10$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{l} v_n > u_n \\ v_n \leqslant 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{u_n \leqslant 10}$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout n, $u_n \geqslant u_0 \iff u_n \geqslant 2$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{l} v_n > u_n \\ u_n \geqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{v_n \geqslant 2}$.

(c) La suite (u_n) est croissante majorée par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ.

La suite (v_n) est décroissante minorée par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite (v_n) est convergente vers un réel ℓ'.

3. La suite (w_n), définie par $w_n = v_n - u_n$, est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à $\boxed{\ell' - \ell}$.

Or la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et $-1 < \frac{5}{12} < 1$; donc on peut dire que la suite (w_n) est convergente vers 0.

La limite d'une suite est **unique** donc $\ell' - \ell = 0$ et donc $\boxed{\ell' = \ell}$; les suites (u_n) et (v_n) ont donc la même limite qu'on appelle ℓ.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1}$

$$= 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n$$

$= 3u_n + 4v_n = t_n$ donc la suite (t_n) est constante.

On a : $t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = \boxed{46}$

Comme la suite (t_n) est constante, pour tout n, $t_n = t_0 = 46$; la suite (t_n) est donc convergente vers 46.

Les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux convergentes vers ℓ donc la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est convergente vers $3\ell + 4\ell = \boxed{7\ell}$.

La limite d'une suite est unique donc $7\ell = 46 \iff \ell = \frac{46}{7}$.

La limite commune des suites (u_n) et (v_n) est donc $\boxed{\frac{46}{7}}$.

II Amérique du Sud novembre 2011

1. Soit l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

$\Delta = -16 < 0$; l'équation a deux solutions complexes conjuguées.

$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} = \boxed{1 - 2i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \boxed{1 + 2i}$.

2. (a) Voir la figure ci-dessous.

(b) $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{1-2i-1-\sqrt{3}-i}{1+2i-1-\sqrt{3}-i}\dfrac{-3i-\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}} = \dfrac{-3i-\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$
$\dfrac{(-3i-\sqrt{3})(i+\sqrt{3})}{(i-\sqrt{3})(i+\sqrt{3})} = \dfrac{3-3i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{i^2-3} = \dfrac{-4i\sqrt{3}}{-4}$
$= \boxed{i\sqrt{3}}$.

On pouvait aussi « deviner » qu'on pouvait factoriser, car on devine, après que nous avons tracé la figure, que le triangle est rectangle, donc que le nombre cherché est imaginaire pur, donc doit pouvoir se simplifier.

En effet : $\dfrac{-3i-\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}} = \dfrac{i\sqrt{3}\left[i-\sqrt{3}\right]}{i-\sqrt{3}} = i\sqrt{3}$.

(c) $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i\sqrt{3}$ (imaginaire pur) : cette égalité montre qu'un argument du quotient est égalà $\dfrac{\pi}{2}$, soit $\boxed{\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{\pi}{2}}$.

Conclusion : le triangle ABC est **rectangle** en C. (non isocèle car $CB = \sqrt{3}CA$)

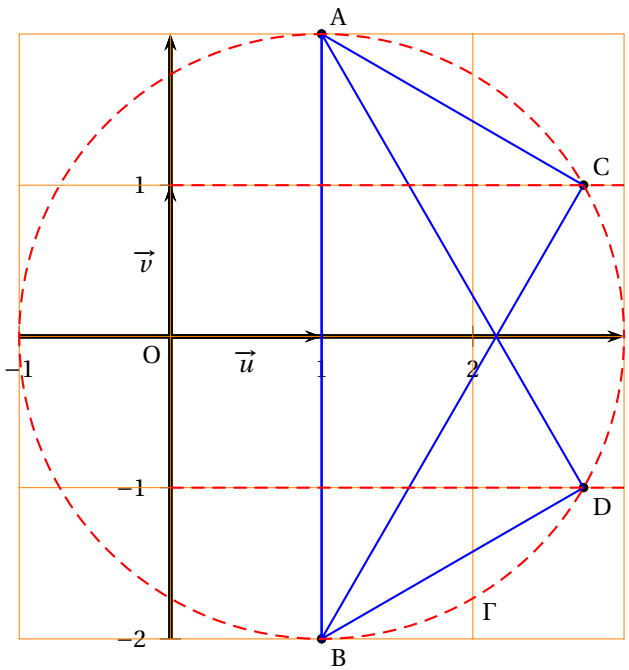
3. Le triangle ABC est rectangle d'hypoténuse [AB] ; il est donc **inscrit** dans un cercle Γ de centre le milieu de [AB] soit le point d'affixe 1 et de rayon $\frac{1}{2}AB = 2$.

   Dans la symétrie autour de l'axe $(O, \vec{u})$ les points A et B sont symétriques de même que les points C et D puisque leurs affixes sont conjuguées.

   Le symétrique du triangle ABC est donc le triangle BAD. La symétrie étant une **isométrie**, c'est-à-dire une transformation qui conserve les longueurs et donc les angles, le triangle BAD est lui aussi rectangle en D donc inscrit dans le même cercle Γ centré au milieu de [AB] et de rayon 2.

   Sinon, on calcule le nombre $\dfrac{z_B - z_Z}{z_A - z_D}$. un argument vaut $\dfrac{\pi}{2}$ et correspond à l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DB}\right)$.

4. C est le point dont l'affixe a une partie réelle positive, intersection du cercle précédent Γ et de la droite d'équation $y = 1$.idem pour D avec la droite d'équation $y = -1$.



III Polynésie septembre 2011

Partie A

1. $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{i-2+3i}{6-i-2+3i} = \dfrac{-2+4i}{4+2i} = \dfrac{-1+2i}{2+i}$
$= \dfrac{(-1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{-2+2+i+4i}{4+1} = \dfrac{5i}{5} = \boxed{i}$.

2. Le résultat précédent $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ donne
$\dfrac{AB}{AC} = \left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = |i| = 1$, ce qui signifie que $\boxed{AB = AC}$ et $\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ donc B est l'image de C dans le quart de tour direct de centre A (rotation) : le triangle ABC est donc **rectangle et isocèle** en A.

Partie B

1. On a $z_{D'} = \dfrac{i(1-i-2+3i)}{1-i-i} = \dfrac{i(2i-1)}{1-2i} = \dfrac{-i(1-2i)}{1-2i} = \boxed{-i}$.

2. (a) Il faut résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$, l'équation :
$z' = 2i \iff \dfrac{i(z-2+3i)}{z-i} = 2i \iff \dfrac{z-2+3i}{z-i} = 2 \iff$
$z-2+3i = 2(z-i) \iff -2+3i+2i = z \iff z = -2+5i$.
Donc $\boxed{z_E = -2+5i}$.

   (b) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AE}$ est $-2+5i-2+3i = -4+8i$.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $i-2+3i = -2+4i$.
On a la relation de colinéarité : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$, donc les points A, B et E sont **alignés** (on peut même plus précisement dire que E est le symétrique de A autour de B.

3. Pour $z \neq i$, on a : $z' = \dfrac{i(z-2+3i)}{z-i} \iff z' = \dfrac{i(z-z_A)}{z-z_B}$ (1), d'où, en prenant les modules des deux membres,
$\boxed{OM' = \dfrac{AM}{BM}}$ avec $z \neq i$ ou encore M distinct de B.

4. De même en prenant les arguments des deux membres de l'équation (1), on obtient :

$$\boxed{\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}}$$

5. Si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors $AM = BM$; le résultat de la question 3. donne alors : $OM' = 1 \iff M'$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique).

6. Si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et en utilisant le résultat de la question 4. on a alors :
$\dfrac{\pi}{2} = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ à 2π près $\iff \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0$ à 2π près, ce qui signifie que les points A, B et M sont alignés.

IV Fonction limite d'une suite de fonctions

Pour tout entier $n \geqslant l$, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n.·

1. (a) f_n est dérivable comme fonction rationnelle (quotient de polynômes) ; $f_n = \dfrac{1}{u_n}$ avec $u_n(x) = 1 + x^n$ donc $f_n' = -\dfrac{u_n'}{u_n^2}$ avec $u_n'(x) = nx^{n-1}$.
On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f_n"(x) : -\dfrac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} \leqslant 0$.
La fonction f_n est donc décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = \dfrac{1}{2}$. Les courbes $\mathscr{C}_n$passent toutes par les points de coordonnées $(0\,;\,1)$ et $(1\,;\,2)$.
Montrons que ce sont les seuls. Si, pour tout n, $M\big(x\,;\,f_n(x)\big) \in \mathscr{C}_n$, en particulier, ce point appartient à $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$ donc $f_{n+1}(x) = f_n(x)$.
$f_{n+1}(x) = f_n(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+x^{n+1}} = \dfrac{1}{1+x^n} \Leftrightarrow \dfrac{1+x^n-1-x^{n+1}}{(1+x^n)\left(1+x^{n+1}\right)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^n(1-x)}{(1+x^n)\left(1+x^{n+1}\right)} = 0$.
Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facterurs est nul. On trouve $\boxed{x = 0 \text{ ou } x = 1}$.
Il n'y a bien que ces deux points.

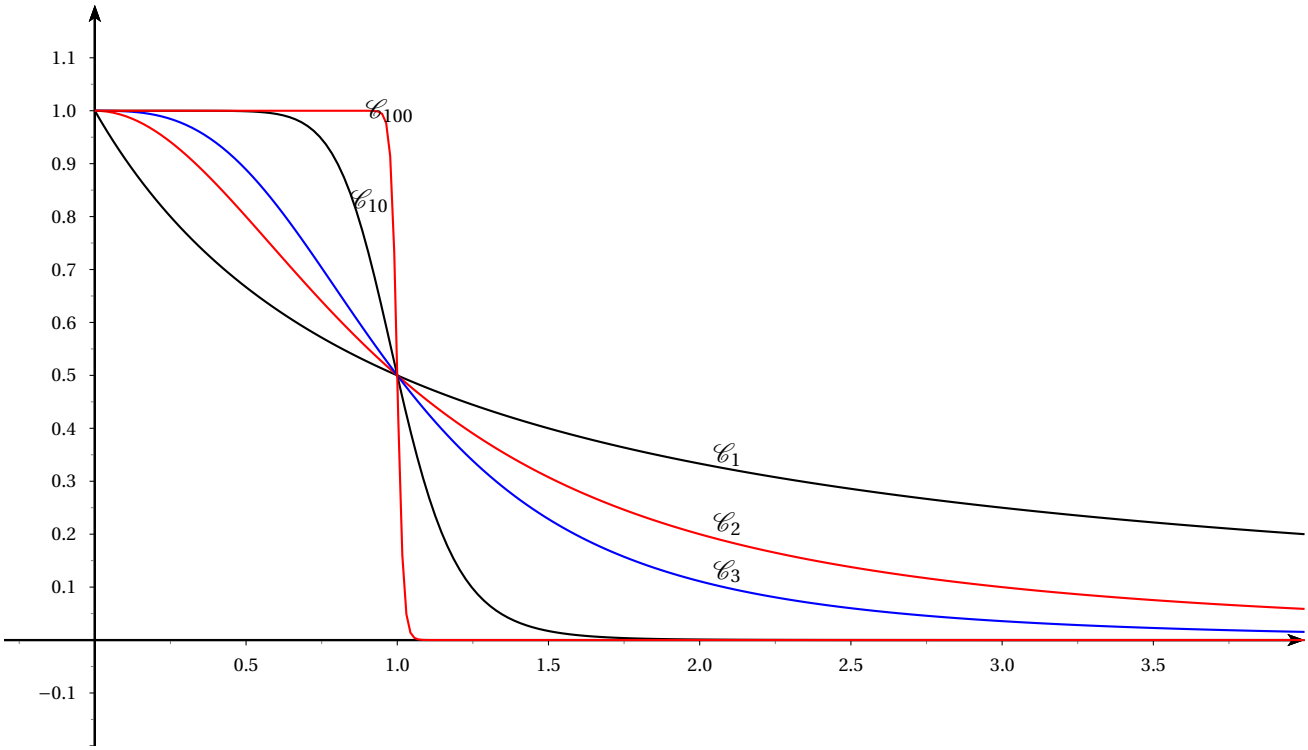
(c) Soient deux entiers n et m non nuls avec $n < m$.
Soit $x \geqslant 0$; $f_m(x) - f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^m} - \dfrac{1}{1+x^n} = \dfrac{x^n - x^m}{(1+x^n)(1+x^m)}$ qui est du signe du numérateur.
Or $x_n - x\acute{I}m = x^n\left(1 - x^{m-n}\right)$.
Pour $x = 0$ ou $x = 1$, cette expression s'annule ; on retrouve les deux points fixes de la question précédente.
Pour $0 < x < 1$, $x^{m-n} < 1$ donc $f_m(x) - f_n(x) > 0$: $\mathscr{C}_m$ est au-dessus de $\mathscr{C}_n$.
Pour $x > 1$, $x^{m-n} > 1$ donc $f_m(x) - f_n(x) < 0$: $\mathscr{C}_m$ est au dessus de $\mathscr{C}_n$.

2. courbes ci-dessous

(a) Conjectures :
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \dfrac{1}{2}$
- Pour $0 < x < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$
- Pour $x > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

(b) **Démonstrations :**
- Pour tout n, $f_n(0) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$.
- Pour tout n, $f_n(1) = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \dfrac{1}{2}$.
- Pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$
- Pour tout $x > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+x^n\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

(c) Pour tout réel $x \geqslant 0$, on note $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.
On définit ainsi une fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction f est définie par $f(x) = 1$ pour $x \in [0\,;\,1]$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = 0$ pour $x > 1$.

(d) Il est clair que la fonction f n'est pas continue en 1, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 1 \neq f(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = 0 \neq f(1)$

Conclusion : la limite d'une suite de fonctions continues n'est pas forcément continue ; pour cela, il faut la notion de convergence uniforme, plus forte que la convergence simple, qui ne s'étudie pas en Terminale.