Terminale S : correction du devoir sur feuille n° 2

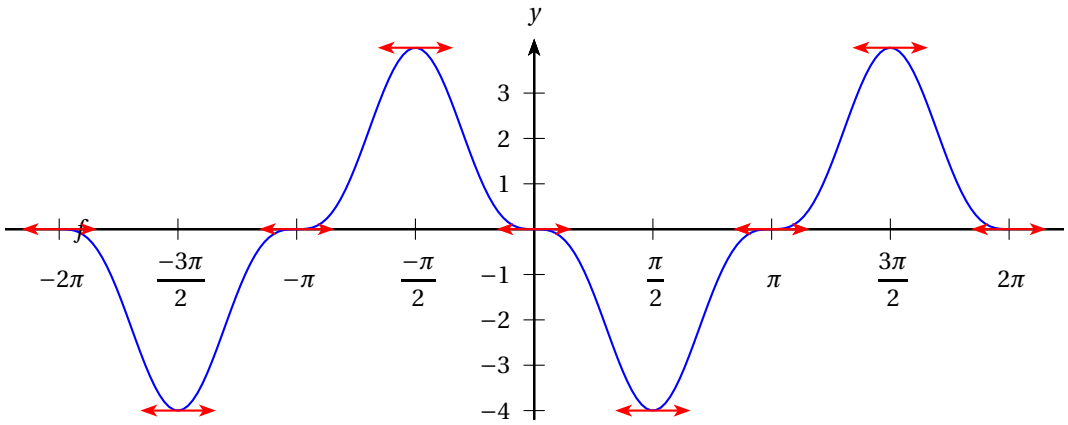
I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin 3x - 3\sin x$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \sin(3x+6\pi) - 3\sin(x+2\pi) = \sin(3x) - 3\sin(x) = f(x)$ car la fonction sin est $2\pi-$ périodique, donc la fonction f est **périodique** de période 2π.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sin(3\times(-x)) - 3\sin(-x) = \sin(-3x) - \sin(-x) = -\sin(3x) + \sin(x) = -f(x)$ car la fonction sin est impaire. On en déduit que f est **impaire**.
   On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.
   Alors :
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\pi - x)$
   $= \sin(3\pi - 3x) - 3\sin(\pi - x) = \sin(2\pi + \pi - 3x) - 3\sin(\pi - x)$
   $= \sin(\pi - 3x) - 3\sin(\pi - x) = \sin(3x) - 3\sin(x) = f(x)$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(\pi - x) = f(x)}$
   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$.
   .
   - Comme f est périodique de période 2π, on peut restreindre l'étude de f à n'importe quel intervalle de longueur 2π.
   - Comme f est impaire, on se restreint à la partie positive d'un intervalle de longueur 2π, centré sur l'origine, donc sur $[0\,;\,\pi]$.
   - Comme pour tout x, $f(\pi - x) = f(x)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ st symétrique par rapport à la droite d'équation $= \dfrac{\pi}{2}$, donc on peut se restreindre à étudier f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme et composée de fonctions dérivables.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3\sin'(3x) - 3\sin'(x) = 3\cos(3x) - 3\cos(x)$
   $= 3(\cos(3x) - \cos(x))$
   $= 3(\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) - \cos(x))$
   $= 3\left[\left(1 - 2\sin^2(x)\right)\cos(x) - \sin(x)\sin(2x) - \cos(x)\right]$
   $= 3\left[\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(2x) - \cos(x)\right]$
   $= 3\left[-2\sin^2(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(2x)\right]$
   $= -3\sin(x)\left[2\sin(x)\cos(x) + \sin(2x)\right]$
   $= -3\sin(x)[\sin(2x) + \sin(2x)] = \boxed{-6\sin(x)\sin(2x)}$.
3. On se restreint à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$.
   Pour $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $2x \in [0\,;\,\pi]$, donc $\sin(2x) \geqslant 0$.
   On en déduit que $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$ ou $\sin(2x) = 0$, donc $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$.
   On en déduit le tableau de variation sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(0)$	0	$\searrow$	-4

4. On commence par tracer la courbe sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$; pour avoir la courbe sur $[0\,;\,\pi]$, on effectue une symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$.
   Comme la fonction est impaire, la courbe est symétrique par rapport à O, ce qui permet de tracer la courbe sur $[-\pi\,;\,\pi]$.
   Comme f est $2\pi-$ périodique, on translate la partie de la courbe obtenue sur $[-\pi\,;\,0]$ pour tracer la partie sur $[\pi\,;\,2\pi]$ en effectuant une translation de vecteur $2\pi\,\vec{i}$.



Pour ceux qui ont oublié le cours de trigonométrie de première, voir ici

II

Soit P_n la proposition $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Démontrons cette propriété par récurrence pour $n \geqslant 1$.

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, $f'(x) = \sin'(x) = \cos(x)$ et $\sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \cos(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

- On suppose la propriété vraie pur un rang n quelconque, donc $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
  Alors $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = 1 \times \sin'\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
  Pr $\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ car $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.
  On a donc $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$. La propriété est donc héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

III

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. Soit M un point quelconque de sa courbe représentative $\mathscr{C}$ et soit $A(1\,;\,0)$.

1. On conjecture que la longueur AM est minimale pour $x = \frac{1}{2}$.
2. $A(1\,;0)$, $M(x\,;\,\sqrt{x})$.
   $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\sqrt{x} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x} = \boxed{\sqrt{x^2 - x + 1}}$.
3. On note g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$. g est la fonction correspondant à la longueur AM.
   (a) $g = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 - x + 1$ d'où $g' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $g'(x) = \boxed{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}}$.
   Il est clair que $f'(x)$ est du signe de $2x-1$, donc positif pour $x \geqslant \frac{1}{2}$ et négatif pour $x \in \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.
   (b) Le tableau de variation de g est donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

   (c) La distance est minimale pour $x = \frac{1}{2}$ et vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

IV

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est un polyn‡¥me) et, pour tout x, $g'(x) = 3x^2 - 3 = \boxed{3(x+1)(x-1)}$.
   $g'(x) = 0$ pour $x = -1$ ou $x = 1$; $g'(x)$ est un polyn‡¥me du second degré ; il est positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines. On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) D'après le tableau de variation, $g(x) < 0$ sur $[-\infty\,;\,1]$. g est continue (polyn‡¥me), $g(1) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) + +\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution sur $[1\,;\,+\infty[$. Comme g est croissante sur cet intervalle, cette solution est unique. Notons-la α.

   ¿ la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha \approx 2{,}20}$, à 10^{-2} près.
   (c) On en déduit le signe de $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

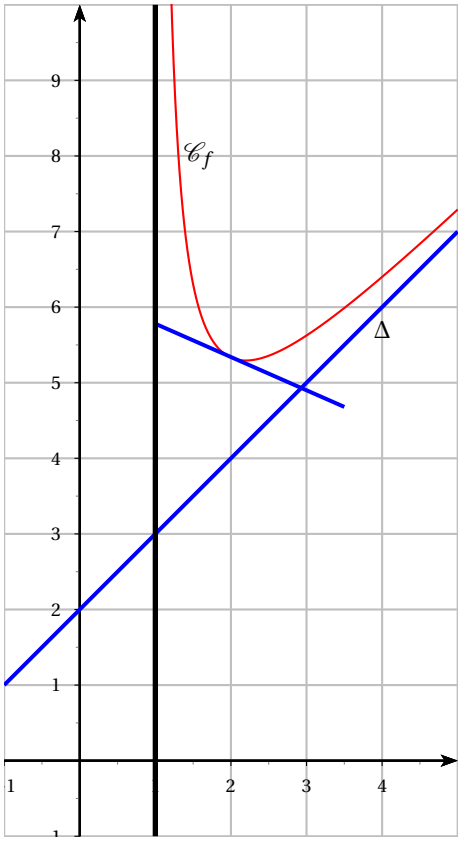
2. Soit f la fonction défiinie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.
   (a) f est dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables.
   $\forall x \in]1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + 2x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 + 4x^3 - 4x - 2x^4 - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} = \cdots = \boxed{\frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}}$.
   Comme sur $]1\,;\,=\infty[$; x et $(x^2 - 1)^2$ sont positifs, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

   (b) $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 1) = 0$ (avec $x^2 - 1 > 0$, car $x > 1$) ; $\lim\limits_{x \to 1}(x^3 + 2x^2) = 3$, donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.
   $f(x) = \frac{x^3\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{1 - \frac{1}{x^2}}$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$..
   On en déduit le tableau de variation de f :

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

   (c) $\forall x > 1$, $f(x) - (x + 2) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} - (x + 2) = \frac{x^3 + 2x^2 - x^2 + x - 2x^3 + 2}{x^2 - 1} = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$.
   $\forall x > 1$, $\frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - (x + 2)\right] = 0$.
   La droite d'équation $y = x + 2$ est bien asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
   (d) L'équation réduite de la tangente à $_f$ en 2 est $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit $\boxed{y = -\frac{4}{9}x + \frac{56}{9}}$.

(e) Graphique :



V

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x + 1.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$: pour tout x, $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - \frac{3}{4}$.
   f' est dérivable : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 12x^2 - 6x + 2 = 2\left(6x^2 - 3x + 1\right)$.

2. Le discriminant de $6x^2 - 3x + 1$ est négatif, con, pour tout x, $2\left(6x^2 - 3x + 1\right) > 0$ (signe du coefficient de x^2).
   On en déduit que f' est croissante sur $\mathbb{R}$.
   Le tableau de variation de f' est :

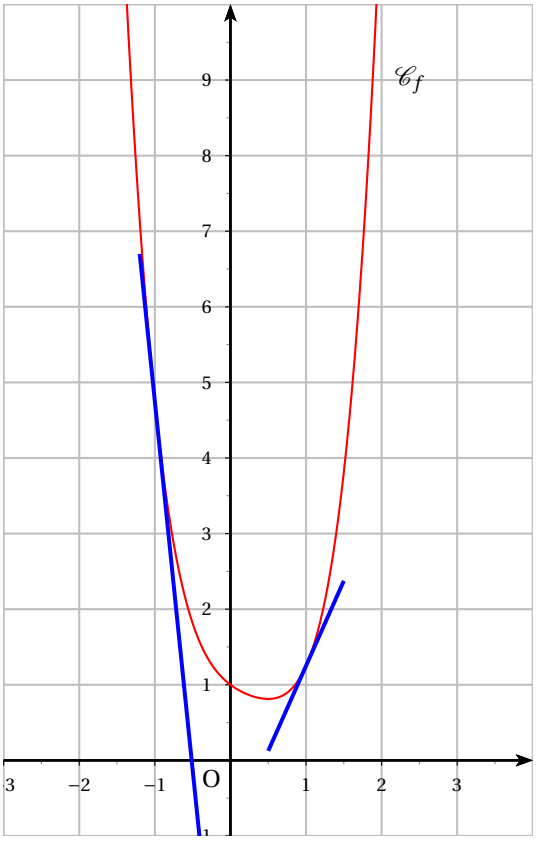
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$: on en déduit que
   $f'(x) < 0$ pour $x < \frac{1}{2}$; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > \frac{1}{2}$.

4. $f(x)$ est un polyn‡¥me ; en factorisant par le terme de plus haut degré, on trouve $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{13}{16}$	↗	$+\infty$

5. Équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en -1 : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{39}{4}x - 5}$.
   Équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{9}{4}x - 1}$.
   Tracé :



VI

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}.$$

1. Étude de la fonction f_1 :
   (a) On a $f_1(x) = x\sqrt{1-x}$; $f_1 = uv$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{1-x}$.
   f_1 est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables.
   $f_1' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ car $v = \sqrt{w}$ avec $w(x) = 1 - x$ et $\left(\sqrt{w}\right)' = \frac{w'}{2w}$.
   On en déduit $f_1'(x) = 1 \times \sqrt{1-x} + x \times \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)$

$= \sqrt{1-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2\left(\sqrt{1-x}\right)^2 - x}{2\sqrt{1-x}}$

$= \boxed{\dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}}$.

$f_1'(x)$ est du signe de son numérateur car le dénominateur est positif ; $2-3x$ s'annule en $\dfrac{2}{3}$ et est positif sur $\left]0\,;\,\dfrac{3}{2}\right]$, donc négatif sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;\,1\right]$

(b) On en déduit le tableau de variation de f_1.

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

(c) On en déduit que f_1 admet un maximum en $x_1 = \dfrac{2}{3} \in]0\,;\,1]$.

2. Étude des fonctions f_n

(a) On a un calcul analogue :

$f_n'(x) = nx^{n-1}\sqrt{1-x} + x^n \times (-1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$

$= nx^{n-1} - \dfrac{x^n}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2nx^{n-1}(1-x) - x^n}{2\sqrt{1-x}}$

$= \boxed{\dfrac{x^{n-1}\left[2n(1-x)-x\right]}{2\sqrt{1-x}}}$.

(b) Comme le dénominateur est positif, $f_n'(x)$ est du signe du numérateur ;

$f_n'(x) \geqslant 0$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{2n}{2n+1}\right]$, nul en $x_n = \dfrac{2n}{2n+1}$ et positif sur $\left[\dfrac{2n}{2n+1}\,;\,1\right]$.

On en déduit le tableau de variation, analegue à celui de f_1 :

x	0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$	$\searrow$	0

(c) On en déduit que f_n a un maximum sur $]0\,;\,1[$ en $x_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.

3. Étude de la suite (x_n)

(a) On a trouvé $x_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.

Pour tout n, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2(n+1)}{2n+3} - \dfrac{2n}{2n} = \cdots$

$= \dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)} > 0$ donc la suite (x_n) est croisante.

(b) Pour tout n, $x_n = \dfrac{2n}{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2n}}$ d'où

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1}$