Correction du devoir n° 1

I

Soit (E) l'équation $x^4+4x^2-21=0$.
C'est une équation **bicarrée**. On effectue le changement de variable : $X=x^2$.
(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X^2+4X-21=0 \end{cases}$.
Résolvons l'équation (E') : $X^2+4X-21=0$.
$\Delta=100>0$; l'équation (E') a deux solutions réelles : $X_1=-7$ et $X_2=3$.
On revient à l'équation initiale en résolvant les équations $x^2=X_1$ et $x^2=X_2$.

- $x^2=X_1=-7$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$, car $-7<0$.
- $x^2=X_1=3$ a **deux** solutions dans $\mathbb{R}$: $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
  (Attention à ne pas oublier la solution négative !)

L'équation (E) a pour solutions : $\boxed{\mathscr{S}=\{-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\}}$

II

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{(2x+1)(3x-4)}{(x+1)(x+3)}\leqslant 0$.

- L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{-3\,;\,-1\}$
- Le numérateur s'annule pour $x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=\dfrac{4}{3}$
- Le numérateur est un trinôme du second degré, du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines, de même que pour le dénominateur.

On renseigne alors un tableau de signes :

x	$-\infty$	-3	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$(2x+1)(3x-4)$	$+$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x+1)(x+3)$	$+$	$-$		$+$	0	$+$	0	$+$	
$\dfrac{(2x+1)(3x-4)}{(x+1)(x+3)}$	$+$	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On voulait que l'expression fût inférieure ou égale à 0. L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=]-3\,;\,-1[\cup\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{4}{3}\right]}$.

III

Démontrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 6$,

$$2^n>6n+7.$$

On note P_n cette propriété.

- **Initialisation :** Pour $n=6$, $2^6=64$ et $6n+7=6\times6+7=43$ donc $2^6\geqslant 6\times6+7$.
  La propriété est vraie pour $n=6$
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque avec $n\geqslant 6$, donc $2^n\geqslant 6n+7$.
  Alors : $2^{n+1}=2\times2^n\geqslant 2\times(6n+7)=12n+14=6(n+1)+7+n+1$ $\geqslant 6(n+1)+7$ donc la propriété est vraie au rang $n+2$.
  Enne est donc héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n\geqslant 6$.

IV

$P(n)$ est la propriété : « 4^n+1 est un multiple de 3 » où n désigne un entier naturel.

1. Supposons la propriété vraie à un rang n quelconque, donc, il existe un entier $k_n\in\mathbb{Z}$ tel que $4^n+1=3k_n$, d'où $4^n=3k_n-1$.
   Alors : $4^{n+1}+1=4\times4^n+1=4\times(3k_n-1)+1=12k_n-3=$ $3(4k_n-1)=3k_{n+1}$ en posant $k_{n+1}=4k_n-1$.
   On obtient bien un multiple de 3, donc la propriété est **héréditaire**.
2. Elle est **fausse** pour $n=0$ donc on ne peut pas en déduire qu'elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$ (elle est même fausse pour tout n).

V

t est la suite définie par $t_0=0$ et, pour tout entier naturel n,

$$t_{n+1}=t_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

1. On truve $t_1=\dfrac{1}{2}$, $t_2=\dfrac{2}{3}$, $t_3=\dfrac{3}{4}$.
2. On conjecture que $t_n=\dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Démonstration par récurrence :
   - **Initialisation :** Pour $n=0$, $\dfrac{n}{n+1}=0=t_0$ donc la propriété est vraie pour $n=:0$.
   - **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, donc $t_{,n}=\dfrac{n}{n+1}$.
     Alors : $t_{n+1}=t_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=$ $\dfrac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\boxed{\dfrac{n+1}{n+2}}$ après simplification.
     La propriété est donc vraie au rang $n+1$, donc elle est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout n, donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{t_n=\dfrac{n}{n+1}}$.

VI

1. On remarque que chaque étape du coloriage consiste à colorier un neuvième de la surface non coloriée jusque là.
   Par conséquent : pour tout $n\geqslant 1$n,
   $A_{n+1}=A_n+\dfrac{1}{9}(1-A_n)=\boxed{\dfrac{8}{9}A_n+\dfrac{1}{9}}$.
2. Pour tout $n\geqslant 1$, on pose $B_n=A_n-1$.
   (a) Pour tout $n\geqslant 1$, $B_{n+1}=A_{n+1}-1=\dfrac{8}{9}A_n+\dfrac{1}{9}-1=$ $\dfrac{8}{9}A_n-\dfrac{8}{9}=\dfrac{8}{9}(A_n-1)=\dfrac{8}{9}B_n$.
   $\forall n\geqslant 1$, $\boxed{B_{n+1}=\dfrac{8}{9}B_n}$.
   La suite (B_n) est géométrique, de raison $q=\dfrac{8}{9}$ et de premier terme $B_1=-\dfrac{8}{9}$.
   (b) On en déduit que, pour tout $n\geqslant 1$, $B_n=B_1q^{n-1}=$ $-\dfrac{8}{9}\left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}=-\left(\dfrac{8}{9}^n\right)$ puis $A_n=B_n+1=1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$
   (c) Comme $-1<\dfrac{8}{9}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{8}{9}\right)^n=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=1}$.
   La surface coloriée a une aire qui tend vers celle du carré initial, même si elle a des trous partout !
   (d) On cherche n tel que $A_n\geqslant 0{,}85$; à la calculatrice, on trouve $n\geqslant 17$. On verra plus tard avec la fonction logarithme comment trouver sans tâtonnement la valeur de n la plus petite qui convient.